A LA RECHERCHE D'UNE COHERENCE ENTRE GEOMETRIE DE L'ECOLE ET GEOMETRIE DU COLLEGE

Catherine HOUDEMENT
Irem de Rouen

Résumé : *L'article se propose de revisiter la dualité « géométrie pratique /géométrie théorique », qui marque le début du collège, mais en réalité toute la scolarité obligatoire. Partant de l'analyse d'un malentendu en formation des maîtres (aussi usuel au collège) entre attente du professeur et réponse d'étudiants ou d'élèves, il met en évidence d'une part la co-existence de deux Paradigmes Géométriques cohérents, tous deux propices à du raisonnement, d'autre part la difficulté, pour l'étudiant ou l'élève, de choisir un paradigme adapté. Il étaye l'hypothèse qu'une connaissance explicite par les professeurs, mais aussi par les étudiants et les élèves, des paradigmes en jeu dans l'activité géométrique, réduirait les malentendus. Enfin il propose la notion d'Espace de Travail Géométrique pour modéliser les interactions entre objets, artefacts et paradigmes en jeu dans une activité géométrique et permettre d'analyser les positions respectives des élèves et du professeur, notamment sous l'influence des curricula.*

I. Introduction

Dans nos discours de professeurs, relayés par certains manuels de collège, on trouve explicitée cette 'règle' ou son équivalent, pour initier à la démonstration : « *Une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai* » (*Triangle 5ème* Hatier 2001 page 127, *Triangle 4ème* Hatier 2002 page 94…) ; « *L'utilisation des instruments permet seulement de se faire une idée, plus ou moins juste, de certaines propriétés d'une figure…* » (Maths *5ème Cinq sur Cinq* Hachette 2000 page 135, Maths *4ème Cinq sur Cinq* Hachette 2002 page 9)… Cette 'règle' est bien sûr vraie dans le contexte des mathématiques théoriques, mais comment les élèves peuvent ils l'intégrer, compte tenu du fait que simultanément, (et très couramment dans les classes antérieures), sont proposés des exercices où il leur est demandé de réaliser effectivement des constructions : tracer des droites parallèles, construire un carré de côté 5 cm, bref produire des dessins à partir de mesures et en utilisant des instruments ?

A quoi servent donc les constructions si elles ne font pas avancer vers la "vérité géométrique" ?

Imaginons des élèves s'attelant à l'une des deux consignes, tracer des droites parallèles ou construire un carré. Si on respecte les adages précités (en italique), on ne devrait pas pouvoir affirmer, une fois le dessin fait convenablement et à partir du seul dessin, que les droites sont parallèles ou l'objet visible un carré. Alors que dire ? Et comment faire la différence avec l'élève qui a dessiné, pour la consigne « parallèles », des lignes droites visiblement concourantes ? Existerait-il des « droites » plus parallèles que d'autres ? Des carrés « plus » carrés ?

Autre exemple : pour convaincre les élèves de la non existence du triangle dont trois longueurs devraient être 12 cm, 7 cm et 3 cm, il est usuel que le professeur demande un tracé qui se révèle impossible : l'élève comprend le dessin comme la preuve de la non existence de ce triangle. Mais on sait que si les longueurs imposées sont 10, 7 et 3 cm, des élèves réussissent à tracer de tels triangles (non aplatis) : et là le professeur refuse le dessin comme preuve d'existence, certifie l'alignement en donnant la priorité à l'égalité numérique. Existerait-il donc des dessins « légaux » et d'autres « illégaux », au regard de la loi mathématique ?

Les professeurs savent qu'il s'agit de changements de regard sur les dessins que des chercheurs antérieurs ont déjà étudiés : la distinction dessin -figure (Arsac et Parzysz dès 1989), domaine de fonctionnement versus domaine d'interprétation attachés à une figure (Laborde-Capponi 1994)…

Mais la question est alors comment savoir (et enseigner) quel regard est licite à quel moment ? Dans quel but ?

Ce sont des questions de ce type qui nous ont engagés (Houdement-Kuzniak 1999, 2000, 2003, Parzysz 2002) dans la recherche d'une interprétation de la géométrie élémentaire, plus exactement des pratiques de géométrie élémentaire dans l'enseignement, mais aussi dans l'histoire.

II. — L'apport de *L'aube des mathématiques grecques*

Les épistémologues de la géométrie considèrent que la première rupture dans la construction de la Géométrie est liée au premier traité de géométrie qui nous est parvenu, les *Éléments* d'Euclide (vers 300 avant J.C.) : de pratique de l'espace, la géométrie se transforme en théorie de la rationalité. On connaît la pérennité et la puissance de ces fondements de la géométrie, puisque la seconde rupture, l'émergence des géométries non euclidiennes, n'intervient qu'au XIXème et conduit à une vision structuraliste de la géométrie. C'est la première rupture qui a à voir avec notre question de départ.

Szabó, dans un ouvrage récent, *L'aube des mathématiques grecques*, affine et reprend un certain nombre de thèses qu'il avait déjà livrées sur la période qui s'étend de 600 à 300 avant J.C. Il insiste sur l'origine pré euclidienne de la géométrie, par les velléités de faire avancer l'astronomie, l'architecture, de généraliser les techniques d'arpentage. Mais cette généralisation n'a pas été immédiatement théorique : chez les Grecs « voir concrètement » a joué longtemps le rôle de preuve (Szabó 1993 page 246), porté en cela par l'origine grecque du mot dé-montrer. Puis, une inflexion décisive, visible dans les *Éléments* d'Euclide, mais déjà présente chez Platon, a consisté à refuser la vérification visuelle, le témoignage des sens, l'évidence intuitive : il s'est agi de ne plus « faire voir » les relations mathématiques. Szabó se pose la question de l'origine de cette inflexion radicale. Il fait l'hypothèse que cette rupture est née, non pas d'une nécessité intrinsèque à la géométrie (géo-métrie, mesure de la terre), comme par exemple, étendre la prévisibilité ou la certitude de propositions géométriques, mais de l'apparition de nouvelles techniques de preuve, comme la démonstration « apagogique », connue plus communément sous le nom de « réduction à l'absurde » (Szabó 1993 page 254). Auparavant la démonstration « synthétique » envisageait la conclusion cherchée comme la conséquence de propositions reconnues vraies, donc pouvait s'appuyer sur des énoncés issus d'observations ou d'expérimentations effectives. Par contre la démonstration « apagogique » ne peut être que du domaine de la *pensée,* dans la mesure où l'on démontre que le contraire de la proposition étudiée contredit une hypothèse prise comme fondement. Avant Platon, les mathématiques empiriques et fondées sur l'induction n'avaient pas besoin de réduction à l'absurde et la démonstration « synthétique » pouvait s'appuyer sur le visible. L'introduction de la « réduction à l'absurde » nécessite de travailler sur des *objets idéels* ; il en résulte un changement d'objets d'étude.

Cette hypothèse a le mérite de donner une origine aux deux fonctions qui sont généralement assignées à la géométrie, dans l'histoire et dans l'enseignement : d'une part science de l'espace, d'autre part théorie déductive. Elle conforte l'idée d'une influence extérieure à l'étude de l'espace, mais inhérente aux mathématiques, c'est-à-dire nécessaire à un moment de leur développement. Il semble ainsi qu'elle « transforme» la géométrie, à ses débuts théorie physique de l'espace, en mathématiques, contribuant simultanément à construire ces mathématiques, par l'injection d'une « dialectique » spécifique sur des thèmes à l'époque d'abord pratiques.

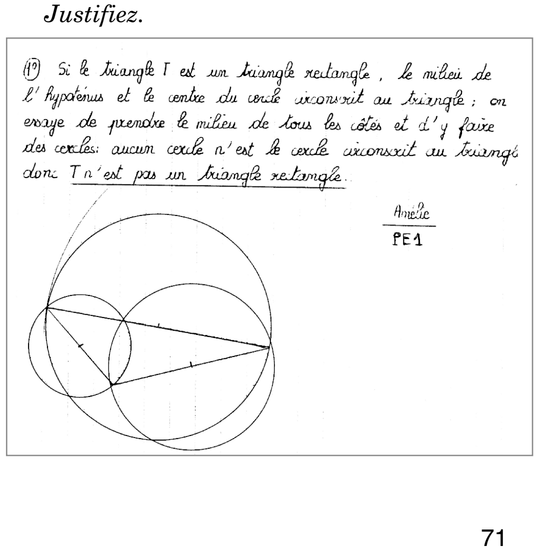
Comment, au XXIè siècle, notamment dans une perspective d'enseignement, ne pas spolier la géométrie de ses deux parties : physique et mathématique ? Comment interpréter la géométrie élémentaire pour mettre en cohérence des pratiques qui, par moment, se révèlent incommensurables ?

III.— Le dilemme des futurs enseignants

Pourquoi parler de pratiques incommensurables ? Notre fonction de formateur nous entraîne à rencontrer des pensées d'adultes que nous ne pouvons simplement rejeter sous prétexte qu'elles ne respecteraient pas une norme, des règles d'origines mal connues ou une fonction mal comprise.

Prenons l'exemple d'Amélie, futur professeur des écoles. Nous reconnaîtrons dans sa réponse un type de « confusion » assez commune dans les copies d'élèves de collège.

Tracez à la règle et au compas un triangle T dont les longueurs des côtés mesurent en cm : 3, 5 et 7. Est-ce un triangle rectangle ? Justifiez.



Amélie ne se contente pas de l'évidence (grâce à l'œil, pas d'angle droit) ou d'une expérience instrumentale (grâce à l'équerre, pas d'angle droit), ce qu'elle serait en droit d'attendre de ses futurs élèves de l'école primaire. Elle cherche à prouver la validité de sa réponse en exhibant des connaissances géométriques, exhibition qu'elle sait attendue du professeur. Mais sa preuve ne revêt pas les caractéristiques attendues des démonstrations de collège, dans la mesure où elle s'appuie sur le dessin effectué.

Pour les objets soumis à l'évidence, cet exemple tend à montrer que ce qui est en jeu dans les problèmes de géométrie du collège n'est pas la nécessité de la preuve, mais l'obligation du caractère plus ou moins formel de cette preuve. Il faut donc créer un lieu, des mots, un espace pour l'élève et l'enseignant afin de différencier des preuves, reconnaître leurs qualités et leurs manques vis-à-vis d'un contrat de formalisme institué par les programmes. Cet espace doit mettre en cohérence des pratiques géométriques anciennes (telles celles de l'école primaire) et une approche plus théorique qui ne s'appuie (presque) plus sur la figure, mais ne s'en libère pas pour autant.

IV. — Nos sources pour l'interprétation de la géométrie

Nous développons un cadre théorique qui prend en charge cette complexité, notamment en définissant des espaces où chaque raisonnement, qu'il soit de nature physique ou théorique devient licite. Ce cadre repose sur une vision de la géométrie élémentaire constituée de trois paradigmes, fortement inspirée de Gonseth (1945-1955). Expliquons d'abord la pertinence de ce mot paradigme pour notre sujet. Selon Kuhn (1970), un paradigme est composé d'une théorie qui guide l'observation, de méthodes et de critères de jugement qui permettent la production de nouvelles connaissances. Un paradigme est ainsi lié à une communauté : le travail du scientifique est guidé par le paradigme dans lequel il travaille, le paradigme est « *ce que partagent ses membres* [un groupe particulier de spécialistes] *qui explique la relative plénitude des communications sur le plan professionnel et la relative unanimité des jugements professionnels* » (Kuhn 1970, page 248). La notion même de paradigme est pour Kuhn constitutive de la science : « *la science doit contenir en elle un moyen de rompre avec un paradigme pour passer à un autre, meilleur que le premier* » (Chalmers 1982 explicitant Kuhn, page 164), mais simultanément l'abandon d'un paradigme au profit d'un autre ne peut se faire de façon logique : selon Kuhn les paradigmes sont *incommensurables*.

Dans sa postface de 1969, Kuhn enrichit cette notion de paradigmes en y intégrant l'idée de problèmes (Kuhn 1970 page 255) : la compréhension d'un paradigme et de ses lois par un étudiant ne peut se réaliser qu'à travers la résolution de problèmes *normaux* où celui-ci va construire des analogies, va acquérir « *une manière de voir autorisée par le groupe et éprouvée par le temps* » (Kuhn 1970 page 258)

Revenons sur la géométrie élémentaire. Nous l'envisageons, à la suite de Gonseth, composée de trois paradigmes : la Géométrie Naturelle (ou Géométrie I), la Géométrie Axiomatique Naturelle (ou Géométrie II), la Géométrie Axiomatique Formaliste (ou Géométrie III).

Ajoutons une précision essentielle : nous avons conservé la terminologie de Gonseth, bien que le qualificatif de Naturelle prête à confusion. En effet rien n'est « naturel », les paradigmes que nous considérons concernent des objets déjà modélisés (traces graphiques sur le papier, maquettes de solides...), nous travaillons déjà en aval des problèmes spatiaux (au sens de Berthelot- Salin 2000), de la protogéométrie (Parzysz 2002).

Nous essayons de préciser les objets, les méthodes et les problèmes qui définissent chacun de ces paradigmes.

V. — Les paradigmes géométriques

V.1 *La Géométrie I*

Les objets de la Géométrie I sont des objets *matériels*, traces graphiques sur le papier ou traces *virtuelles* sur l'écran d'ordinateur, ou encore maquettes d'objets de l'environnement. Ce sont des *épures* au sens que lui donne Chevallard (1991).

Dans les pratiques usuelles, ce sont souvent des objets du micro-espace (Berthelot, Salin 2000) sensés représenter, dans un espace petit et propice à des contrôles, des objets réels plus grands ou plus complexes. Ils sont donc le fruit d'une première modélisation même des plus élémentaires : le trait tracé à la règle refuse les aspérités, le cercle tracé au compas est le produit d'une activité instrumentée représentant le « rond ». Ce sont des productions *commodes* notamment pour la reproduction et la description : le cercle est ainsi plus commode que l'ellipse, pourtant souvent meilleure image du « rond ». C'est dans ce sens qu'il faut comprendre le qualificatif de *Naturelle*.

« *Une figure est ce à quoi l'esprit réduit un corps quand il en fait l'étude au point de vue purement géométrique* » Charles Méray (1903) cité par Fourrey (1907). L'esprit n'est pas absent de cette Géométrie I, même si les objets sont matériels et proches de la réalité.

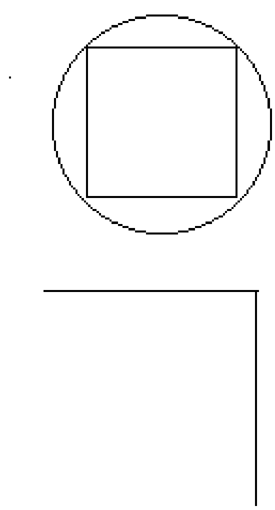
Les objets ne sont déjà plus aussi uniques que leurs traces matérielles : ils sont déjà le fruit d'une première classification, par le choix des mots (comme tout processus de nominalisation) : quadrilatères, carrés, rectangles…. Ce sont déjà pour certains en partie des *objets mentaux* : un trait droit sur le papier, s'il est nommé droite, doit être pensé comme un rectiligne droit illimité, infini….

Pour les problèmes de cette Géométrie, il est normal (au sens de *problèmes normaux* de Kuhn) de s'intéresser à un moment donné à des traces spatio-graphiques ou des maquettes, soit qu'elles sont données comme point de départ, soit que le résolveur est conduit ou prend la décision de les construire. Les techniques (Chevallard 1999) s'appuient sur l'utilisation des instruments dits usuels de géométrie (règle graduée ou non, équerre, compas, rapporteur), mais aussi sur le pliage, le découpage, le calque… Les tâches peuvent être précisées par le choix des instruments autorisés : c'est ainsi que le mesurage est une technique licite et courante en Géométrie I, mais il existe aussi des problèmes résolubles en Géométrie I sans mesurage (Duval 2005 ; Keskessa, Perrin, Delplace 2007). L'expérience usuelle dans ce paradigme est le dessin instrumenté.

Les modes d'accès aux connaissances font appel à l'intuition, comme la reconnaissance perceptive de certains dessins (*c'est un carré je le vois*), à l'expérience, notamment liée à des instruments (*c'est un carré, il a 4 angles droits constatés avec l'équerre et 4 côtés de même longueur, vérifiés avec la règle graduée ou le compas ou ...*), mais aussi au raisonnement :

notamment dans la faculté de mobiliser des connaissances non convoquées pour en déduire des nouvelles. La validation reste empirique, par confrontation à la réalité et par jugement de cette adéquation.

Il serait faux de croire que cette géométrie est vide de raisonnements. Par exemple dans la reproduction de dessins ci-dessous, l'élève qui réussit a sans doute testé l'hypothèse (et validé) du centre du cercle comme point de rencontre des diagonales du carré (ou convoqué cette connaissance).



Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle. Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.

Exercice extrait d'Évaluations nationales de 6ème. Résultats corrects (1997) :
Pour le carré : 94,3%
Pour le cercle : 63,6%

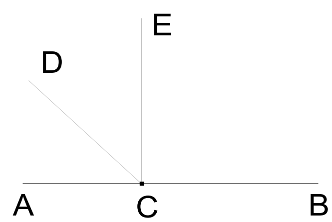
Les raisonnements dynamiques, voire mécaniques, sont autorisés, telle la démonstration ci-contre du Théorème 1 des *Éléments de Géométrie* d'un Maître de Conférence à l'École Normale Supérieure (Briot 1863 page 4)

V.2 *La Géométrie II*

La Géométrie II prend pour objets d'étude des objets *idéels.* D'où la nécessité de définitions, d'axiomes, comme chez Euclide « *Le point est ce qui n'a aucune partie. Les extrémités d'une ligne sont des points.* ». Les axiomes proposés dans la Géométrie euclidienne, prototype de la Géométrie II sont fortement appuyés sur les objets de la Géométrie I conservant ainsi un lien fort avec l'espace sensible, d'où le qualificatif d'*Axiomatique Naturelle.*

Le mode de production des connaissances (qui s'appellent dans ce paradigme Théorèmes) est le raisonnement hypothético-déductif, dont la démonstration est emblématique. Les problèmes devraient être tous uniquement textuels puisque les *objets* de ce paradigme sont les définitions et les théorèmes textuels. Mais ces objets textuels sont conventionnellement, par commodité (voir ci-après) représentés par des schémas, à la « texture » identique aux dessins de la Géométrie I, mais sur lesquels le « regard » (la théorie, le paradigme) doit changer : ce qui a été précisé par un certain nombre de chercheurs notamment en dissociant les expressions « dessin » et « figure », en inventant « figural concept » (Fischbein 1993). Il s'agit là en effet d'objets *conceptuels* au sens de Bunge (1983), qui ne sont définis que par la théorie dans laquelle ils s'insèrent.

Par un point C pris sur une droite AB, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.



Imaginons que la droite CD, coïncidant d'abord avec CA, tourne dans le plan autour du point C ; l'angle ACD ira en augmentant d'une manière continue, tandis que l'angle DCB ira en diminuant ; mais le premier angle, d'abord plus petit que le second, finit par devenir grand ; donc il y a une position CE de la droite pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux, et il n'y en a qu'une. Dans cette position, la droite CE est perpendiculaire à AB. Ainsi, par le point C on peut élever une perpendiculaire CE à la droite AB, et on n'en peut en élever qu'une.

Les schémas et plus généralement les images présentent la caractéristique de regrouper en un tout un certain nombre d'hypothèses (que l'expert — le prof — garde bien à l'esprit MAIS que le novice — l'élève — réinvente à partir du dessin, d'où la notion de domaine de réalité et domaine de fonctionnement de Laborde 1988) et de pouvoir déclencher des schèmes d'enchaînements (que l'expert contrôle par la déduction logique MAIS que le novice contrôle souvent aussi par la réalité). *C'est pourquoi les figures tendent à se substituer aux axiomes et théorèmes comme objets d'étude, alors qu'elles n'en constituent qu'une interprétation.*

Dans ce paradigme, il n'y a pas d'instrument matériel, mais des instruments intellectuels : seul le raisonnement hypothético-déductif permet de construire de nouvelles connaissances. Pourtant il est d'usage que la règle et le compas, ou même les logiciels dynamiques jouent un rôle particulier dans ce paradigme. Nous expliciterons plus loin pourquoi en introduisant notamment la notion d'espace de travail

V.3 *La Géométrie III*

Nous en dirons peu sur ce paradigme. Ses objets sont aussi idéels, le raisonnement hypothético-déductif le moteur et la source des nouvelles connaissances. Ce qui la différencie de la Géométrie II est le fait que les axiomes de base ont coupé le cordon avec la réalité et que l'axiomatisation vise à être complète, alors qu'en Géométrie II, vivent des îlots déductifs. La Géométrie III a émergé avec la naissance des géométries non euclidiennes. Elle est culturellement peu convoquée dans les savoirs de l'école obligatoire.

VI. — Les rapports de GI et GII, hiérarchie ou complémentarité ?

Nous avons donc précisé deux paradigmes de la géométrie élémentaire relativement cohérents quant aux objets d'étude (matériels *versus* conceptuels) ; aux techniques licites (dessins instrumentés *versus* inférence de conjectures et validation par déduction logique) ; aux modes de validation (références au réel *versus* références logiques).

Ces deux paradigmes ne sont pas a priori hiérarchisés dans leur rapport à l'espace : il n'y a pas d'argument logique pour décider a priori lequel serait meilleur pour modéliser l'espace (cf. Kuhn 1970), d'autant plus avec le développement des logiciels informatiques.

VI.1 *Retour sur Amélie*

Revenons sur la réponse d'Amélie : la question démarre par une exigence de construction effective, elle incite à se placer en Géométrie I ; Amélie réussit sa construction. La seconde partie de la question se place selon le contrat usuel en Géométrie II : Amélie comprend sans doute l'exigence de justification comme la nécessité de montrer une propriété géométrique, en quelque sorte la nécessité de relier la réponse à du connu antérieur. Par contre elle continue à travailler sur le dessin réel et non avec l'objet idéel à inférer dans la Géométrie II. Elle reste en Géométrie I, ayant peut-être l'impression qu'elle répond aux critères de la Géométrie II, puisqu'elle nous montre des connaissances géométriques et qu'elle sait les utiliser.

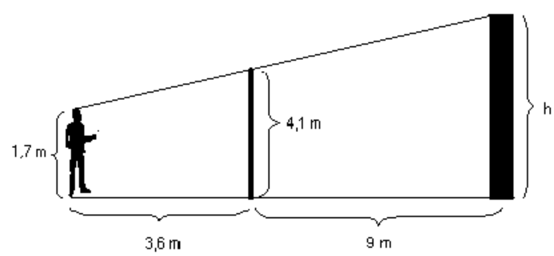
Il est aussi vrai que tel qu'il est rédigé, cet exercice peut laisser croire que la question posée porte sur l'objet triangle dessiné et à ce titre concerne la Géométrie I. Cette remarque souligne la réelle ambiguïté de tels exercices pour celui qui n'est pas au fait du but assigné à la géométrie du collège et le risque de malentendus entre élèves et professeur : le professeur voit le dessin comme une aide heuristique, l'élève peut y voir un mode de production de la réponse.

Dans tous les cas, il nous semble qu'Amélie serait aidée par une explicitation préalable des deux paradigmes en jeu et de leurs caractéristiques, qui lui permettrait de mettre à sa place (Géométrie I et/ou Géométrie II) chacune des affirmations qu'elle nous livre.

VI.2 *Un autre exemple*

Etudions cet exemple assez classique [1] :

Trouve la hauteur h du poteau en t'appuyant sur la schématisation ci-dessous :



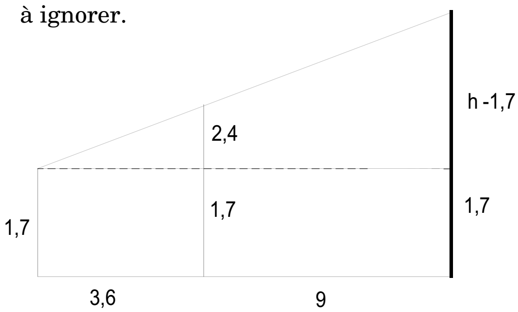
Ce problème au départ n'est pas un problème posé dans le paradigme Géométrie II dans la mesure où un grand nombre d'informations (dont les angles) ne sont disponibles que sur le dessin. Plusieurs résolutions de cette question sont possibles, en précisant selon le paradigme où elles sont licites.

Ce problème peut être traité en Géométrie I par, par exemple, un dessin à l'échelle 1/100 (donc une conservation « approximative » des angles), un mesurage de h sur le dessin réduit et une mesure de la hauteur du poteau. La hauteur de h peut alors être estimée entre 10 et 10,3 m.

Ce problème peut aussi être traité en Géométrie II moyennant l'intégration d'hypothèses « raisonnables » (deux droites coupées par trois droites parallèles, les « verticales »)

1 Problème étudié dans le cadre du projet universitaire de coopération franco-chilien (ECOS-Conicyt 2003-05 : Castela & al. 2006)

et par exemple l'utilisation du théorème de Thalès dans un triangle obtenu par l'ajout spontané d'un tracé[2] auxiliaire. Cette construction d'une sous-figure correspond à une technique de Géométrie I, mais à la recherche d'une figure prototypique de Géométrie II. Cette technique de Géométrie I n'est ni évidente, ni spontanée comme l'a précisé notamment Duval (1988, 2005). Le travail à mener en Géométrie I pour nourrir la Géométrie II n'est pas à ignorer.



$$\frac{2,4}{3,6} = \frac{h-1,7}{12,6} \text{, d'où } h = 10,1$$

Peut-on parler d'une meilleure solution ? Oui, s'il y a en jeu une précision : cette précision doit alors être demandée et aussi précisée pour les mesures de départ. A défaut les nombres proposés, dans ce contexte d'évocation de la réalité, peuvent apparaître comme des résultats de mesurage, donc prétexte à une certaine imprécision. Un traitement en Géométrie I est donc très efficace.

On peut faire valoir que la résolution en Géométrie II présente une économie de tracé et offre une généralisation plus rapide : c'est vrai (et ce pourrait être un argument pour l'entrée dans la Géométrie II) mais pour un problème local, les deux démarches offrent globalement le même coût (dessin *versus* Thalès) et nécessitent des raisonnements non triviaux mettant en jeu de la proportionnalité.

VI.3 *Pour conclure*

On voit que la Géométrie II peut produire une technologie pour des techniques de Géométrie I : les deux tracés usuels de la médiatrice, le partage d'un segment en segments de même longueur, la multiplication et la division géométrique, en général les constructions à la règle et au compas… Mais il existe en Géométrie I des constructions efficaces (pratiquées par les peintres, les professionnels) non validés en Géométrie II, par exemple celles de l'heptagone régulier, de l'ennéagone régulier.

La Géométrie II est même productrice de techniques pour des problèmes spatiaux (Berthelot Salin 2000), mais cette production n'est pas systématique. Certes la corde à douze nœuds du maçon égyptien est contrôlée par le Théorème de Pythagore, un des maillons de la Géométrie d'Euclide. L'archéologue qui veut trouver le diamètre d'une assiette en partie cassée peut, avec le morceau d'assiette restant, tracer un arc de cercle et construire le centre comme intersection de deux médiatrices de cordes. Mais si l'arc est petit, cette technique n'est pas efficace : mieux vaut disposer d'une planche (d'une affiche) avec différents arcs de cercle (et mesures des rayons) prédéterminés et ordonnés, sur l'un desquels l'archéologue pourra poser le morceau d'assiette et lire le diamètre.

En résumé :

1) La Géométrie I ressemble fort à une approche physique des phénomènes, alors que la Géométrie II exacerbe les aspects théoriques.

2 il existe bien d'autres procédures possibles…

2) La Géométrie I fournit *une heuristique et un « terreau »* d'expérimentation pour la Géométrie II. La Géométrie II présenterait un *caractère généralisateur* par rapport à certaines techniques de Géométrie I : un problème résolu en Géométrie II serait susceptible d'automatiser la résolution de problèmes de même type de Géométrie I

3) La Géométrie II fournit *une technologie* de certaines techniques de Géométrie I, mais tous les problèmes spatiaux ne tirent pas systématiquement bénéfice de connaissances de Géométrie II.

VII. — La notion d'espace de travail

Le spécialiste est sans doute conscient de cet aller-retour permanent entre les deux paradigmes lors de la résolution d'un problème géométrique : pour la lecture des hypothèses (notamment des alignements, de la convexité), pour le lancement d'une heuristique, pour certaines définitions et quelquefois même pour la validation, et ce déjà dans l'histoire. Par exemple Carrega (1981, page 5) déclare que, chez Euclide « *La faiblesse de certaines définitions de base, notamment celle de droite ou d'angle nécessitait au cours de la démonstration le secours d'une figure bien faite ; on peut même dire que la figure faisait partie intégralement de la démonstration qui s'adressait aux yeux autant qu'à la raison* »

Cet état de fait se poursuit actuellement dans l'enseignement où aucun glossaire de manuel de collège ne fournit jamais de définition pour droite, ni pour angle. L'hypothèse que nous faisons est que des versions simples de ces définitions sont difficilement réductibles uniquement à du texte, comme l'avait déjà constaté Euclide.

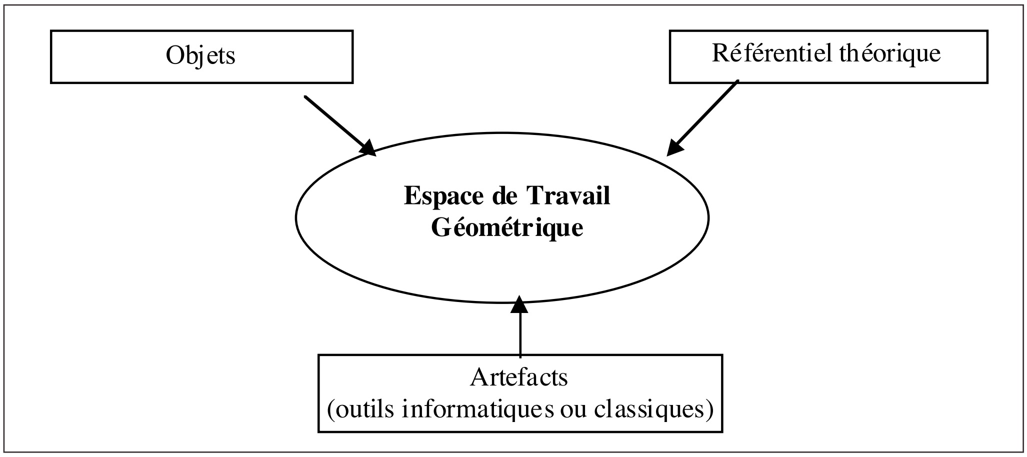
La complémentarité des deux paradigmes et la difficulté à les séparer dans l'activité géométrique nous a conduit à concevoir un nouvel objet, celui celle d'Espace de Travail Géométrique (Kuzniak 2003, Houdement- Kuzniak 2006).

VII.1 *Qu'est ce que l'Espace de Travail Géométrique ?*

La notion d'*espace* est à prendre assez naïvement au sens espace de pensée : s'y insèrent des objets, des outils, et une finalité, un horizon pour le travail géométrique. La finalité est définie par le choix du paradigme géométrique qui devient le *référentiel théorique. Le travail* consiste en l'établissement d'un rapport entre objets empiriques et théoriques, il ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets.

Les objets sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent du modèle théorique qui les définit. Dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Dans la Géométrie Axiomatique Naturelle (Géométrie II), les définitions des points, droites et plans s'appuient sur notre perception de l'espace environnant et nous permettent d'utiliser notre intuition perceptive pour étudier certaines sous-parties de l'espace, les figures ou les configurations. En Géométrie I, les objets d'étude sont les dessins ou les maquettes.

Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail : dans la géométrie enseignée, ils constituent pour les élèves la face la plus visible et la plus prégnante.



Rabardel (1995) précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action. L'intérêt de cette approche est d'attirer l'attention sur le processus de genèse instrumentale qui transforme un artefact en instrument avec une double orientation : l'instrumentalisation orientée vers les usages de l'artefact et l'instrumentation tournée vers l'appropriation par le sujet des schèmes d'action. Cette distinction entre instrumentation et instrumentalisation nous semble capitale dans notre approche, comme nous allons le préciser.

En géométrie cohabitent deux sortes d'artefacts : les instruments géométriques usuels (règle graduée ou non, équerre, compas) ou moins usuels (calque, ficelle, gabarits….), mais aussi les les règles théoriques qui régissent le fonctionnement du système hypothético-déductif. Les seconds concourent à la preuve en Géométrie II, ce sont en effet les seuls instruments licites de la validation en Géométrie II. Les premiers concourent à la preuve en Géométrie I (ils aident à clore le problème), nourrissent l'heuristique en Géométrie II. Ainsi les mêmes artefacts peuvent avoir des fonctions différentes sur les mêmes traces graphiques. L'instrumentalisation des instruments usuels de la géométrie diffère selon le paradigme visé.

C'est ainsi que la règle et le compas sont deux artefacts dont l'utilisation combinée apparaît comme un sésame pour approcher la Géométrie II, pourtant dévolue aux objets idéels. La règle et le compas sont théoriquement associables à des questions de constructibilité en Géométrie II, ce qui n'est pas le cas de l'équerre, qui ne bénéficie pas de l'étayage théorique, des *Éléments* d'Euclide. En effet (Szabó 1993, p284) « *les postulats euclidiens 1, 2 et 3 des Éléments d'Euclide représentent la justification théorique de la règle et du compas dans les constructions géométriques. On peut tracer une droite d'un point à un autre (1er postulat) et prolonger indéfiniment une droit finie (2ème postulat), parce qu'on a le droit d'utiliser la règle ; on peut prendre un centre quelconque et un rayon quelconque pour décrire un cercle (3ème postulat), parce* *que l'emploi non seulement de la règle, mais aussi du compas est autorisé. ».* Pourquoi ces deux seuls instruments ? Toujours selon Szabó, ce sont eux qui permettent de conserver les mouvements de base, linéaire et circulaire, dans la version théorique.

Ainsi l'habitude d'utiliser règle et compas résulte déjà d'un croisement d'horizons : conserver des techniques de construction élémentaire économiques, mais fondées théoriquement par les premiers postulats. Mais dans l'enseignement, leur intégration dans l'espace de travail dépend du regard théorique que l'expert peut porter sur eux, mais qui reste encore caché au novice : la fonction de l'exigence de tracés à la règle et au compas n'est guère transparente.

Par contre en Géométrie I, les instruments sont légion. La règle non graduée est un instrument peu usuel pour reproduire, mais Duval et Godin (2005) ont revisité son usage pour construire de véritables problèmes en Géométrie I dès l'école primaire. Au collège, la règle à bords parallèles (Berthe-Cazier 2000), les logiciels dynamiques (Capponi 2000) sont de puissants outils de construction d'objets matériels ou virtuels.

VII.2 Fonctionnement de l'Espace de Travail Géométrique

Cette dynamique de l'espace de travail, un équilibre maîtrisé entre Géométrie I et Géométrie II, est en particulier palpable dans les pratiques géométriques : un travail conséquent en Géométrie I outille le résolveur dans sa capacité à émettre de conjectures, sans être suffisant pour assurer le raisonnement hypothético-déductif. La fonction de déplacement des logiciels dynamiques type Cabri qui déforme le dessin en respectant ses propriétés d'origine décuple cette capacité à émettre des conjectures et suffit, quand une conjecture résiste au déplacement, à *prouver* dans le paradigme de Géométrie I sa véracité. Simultanément cette approche montre l'autre statut de la démonstration : visée de généralisation, d'explication, d'incontournabilité du phénomène (ce qui donne la certitude pour un nombre *infini* de manipulations « identiques », *id est* : respectant les hypothèses de départ).

Les constructions à la règle et au compas dans l'enseignement participent de cette dynamique Géométrie I — Géométrie II : ce sont des objets de Géométrie I justifiés par une propriété de Géométrie II.

Il est aussi à noter que les pratiques *normales* des experts (communes à des spécialistes à l'intérieur d'un paradigme) les amènent aussi à prélever sur les dessins un certain nombre d'hypothèses telles que positions relatives, convexité… nécessaires à l'avancée du problème mais non relayées par du texte : car ils savent que sans elles, le problème est difficilement traitable.

Mais comment les novices s'emparent-ils de cette pratique ? Souvent en l'étendant de façon inappropriée : on pourrait dire que leur Espace de Travail Géométrique n'intègre pas suffisamment la Géométrie II, dans le sens où ils n'ont pas compris la nécessité de minimaliser le recours au dessin comme production d'informations sures, comme l'exemple d'Amélie.

Ces remarques nous entraînent vers l'existence de multiples Espaces de Travail Géométriques : celui de *référence* de l'expert, gardant l'horizon Géométrie II en vue, quels que soient les détours constructifs qu'il peut faire en Géométrie I ; celui, *personnel*, de l'apprenti, parfois inadapté à l'attente du professeur ; enfin celui, *institutionnel*, lié à une institution donnée, qui, à l'intérieur de cette institution par ses programmes, ses recommandations…, définit la visée du professeur pour ses élèves et en quelque sorte l'horizon paradigmatique à atteindre pour chaque objet.

Nous n'irons pas très loin dans de tels développements.

VII.3 *Retour sur les exemples*

Considérons le problème d'Amélie : il fait appel aux deux paradigmes Géométrie I et Géométrie II. C'est à l'élève ou à l'étudiant de gérer son espace de travail de façon à garder comme horizon la Géométrie I pour la première partie (le tracé) et la Géométrie II pour la seconde. Dans sa réponse, Amélie garde l'horizon Géométrie I pour les deux parties de la question, soit qu'elle n'ait pas connaissance de la Géométrie II, soit qu'elle n'ait pas la connaissance (ici le théorème de Pythagore) qui lui permet de traiter le problème en Géométrie II.

Des problèmes aux questions convoquant tantôt la Géométrie I, tantôt la Géométrie II, sont très courants dans les manuels de collège. Leur traitement adapté nécessite, selon nous, la connaissance de l'existence des deux paradigmes Géométrie I et Géométrie II.

Revenons maintenant sur l'exemple de la détermination de la hauteur du poteau.

Si on s'intéresse aux connaissances nécessaires pour le résoudre, ce problème pourrait être posé à différents niveaux de la scolarité, par exemple : à partir de la 6ème dans l'attente d'un dessin à l'échelle (1cm pour 1m), puis par mesurage ; en 4ème et 3ème dans l'attente de la convocation du théorème de Thalès, associé ou non à des hypothèses de départ explicites et au tracé ou non d'un segment auxiliaire ; en 2de sans ce tracé. Or ce problème ou son équivalent n'est en général présent dans les manuels qu'à partir de la 4ème ; comme réinvestissement du théorème de Thalès.

Dans les habitudes scolaires, c'est l'Espace de Travail Géométrique *institutionnel* (*pour le curriculum de chaque classe*) qui détermine la résolution licite.

En 6ème la démonstration n'est pas construite, une résolution appuyée sur un mesurage serait acceptée ; il est d'ailleurs à noter que cette résolution dénote déjà des connaissances mathématiques (sur les figures homothétiques, le dessin à l'échelle) et du raisonnement. Pourtant ce type d'exercices n'est pas usuel, au moins dans les manuels. Ainsi en règle générale, ce qui touche au mesurage n'est pas travaillé dans ces classes. L'Espace de Travail Géométrique à horizon Géométrie I reste très pauvre, peu problématisé.

Dans les classes postérieures à la 4ème la démonstration est objet d'enseignement, le théorème de Thalès dans le triangle est objet d'étude, les instruments usuels n'ont plus de rôle de validation, ils conservent une valeur heuristique. Le professeur attend un réinvestissement de ces objets dans la réponse. Mais l'Espace de Travail Géométrique *personnel* de l'élève de 4ème n'a pas toujours intégré ces outils théoriques. Que lui reste-il pour répondre si tout ce qui touche à la mesure est péjoré, sans place dans les mathématiques ?

Il semblerait raisonnable que l'élève soit au moins capable, grâce à un mesurage sur un dessin à l'échelle, de produire une approximation de la hauteur du poteau et d'être assuré que cette réponse est localement satisfaisante. La technique développable à cette occasion est généralisable, mais soumise, à chaque fois à l'exécution d'un dessin.

Avec le groupe classe, il serait intéressant, s'ils se présentent, d'accepter et d'analyser chacun des grands modes de résolution et de les nommer en tant que tels (type Géométrie I ou Géométrie II). Ceci permettrait d'abord de valoriser des pratiques très commodes dans la vie ordinaire (dessin à l'échelle et calculs), ensuite de leur donner un statut à l'intérieur de la Géométrie I, enfin de différencier le contrat de la Géométrie II et donner un place à cette phrase très formelle (hors du réel) : *une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé est vrai* en Géométrie II.

Autrement dit, il serait raisonnable d'une part, de rendre conscients professeurs et élèves de l'éclatement de la Géométrie élémentaire en plusieurs paradigmes, qu'il faudrait explicitement nommer ; d'autre part de ne pas limiter l'horizon des Espaces de Travail Géométrique *institutionnels* à la Géométrie II, mais d'accepter l'existence des deux paradigmes assumés, au moins par le professeur, dans les réponses des élèves.

VIII. — Conclusions

Il nous semble que la vision de la géométrie élémentaire en deux paradigmes permet de réconcilier tout en les diversifiant, des pratiques géométriques usuelles : celles des corps de métiers et celles des mathématiciens.

La Géométrie I offre une place licite au mesurage, reconnaît les problèmes d'approximation et étudie la validité de cette approximation ; elle a besoin d'un apprentissage des regards à porter sur un dessin indépendamment de toute velléité de démonstration ; elle restaure la place des constructions, certes à la règle et au compas, mais aussi avec d'autres instruments plus ou moins usuels (règle seule, règle à deux bords , gabarits déchirés…), y compris virtuels, tels les logiciels de géométrie dynamique. Elle est expérimentale et déjà déductive.

La Géométrie II amène à regarder des objets anciens avec un nouveau point de vue, elle infère à partir de ces objets, de nouveaux objets au caractère idéel. La compréhension de la Géométrie II passe par la prise de conscience d'une véritable rupture avec le mode de production (ou de validation) des connaissances : un système théorique qui ne peut se résumer au « faire voir », qu'il soit matériel ou virtuel. La Géométrie II engage dans une perspective qui dépasse la généralisation, vise l'explication (pourquoi il n'en est pas autrement) et la prévision déterministe.

L'enjeu fondamental pour l'enseignement est d'abord la prise de conscience par les enseignants de *l'existence simultanée* (et non chronologique) *de ces deux paradigmes*, de leurs caractéristiques et de leur intérêt à chacun pour l'enseignement de la géométrie ; ensuite selon nos termes, la construction d'un Espace de Travail Géométrique *institutionnel* qui réconcilierait les capacités des élèves et une construction raisonnable de compétences les rendant autonomes dans certains rapports à l'espace, notamment la capacité à aller chercher des instruments adaptés à la tâche à résoudre. Il va sans dire que les exigences, en particulier au collège, ne devraient pas se limiter aux instruments conceptuels (donc à la Géométrie II), au risque de laisser sur la rive des générations d'élèves.

Références bibliographiques

Berthe D., Cazier B. (2000) La règle à bords parallèles. *Repères-IREM* n°**40**. 43-70

Berthelot R., Salin M.H. (2000) L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N* n°**65**. 37-59.

Briot Ch. (1863) *Éléments de géométrie*. Paris : Librairie de L.Hachette.

Bunge (1983) *Epistémologie*. Paris : Éditions Maloine. Collection Recherches Interdisciplinaires

Capponi B. (2000) De la géométrie de traitement aux constructions dans Cabri-Géomètre au collège. *Repères-IREM* n°**40**. 11-42.

Carrega J.C. (1981) *Théorie des corps. La règle et le compas*. Paris: Hermann

Castela C., Consigliere L., Guzman I., Houdement C., Kuzniak A., Rauscher J.C. (2006) *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée en France et au Chili.* Cahier DIDIREM spécial n°6. IREM de Paris 7.

Castela C., Houdement C. (2006) Se dépayser pour interroger les choix de l'enseignement français sur la géométrie. *Bulletin de l'APMEP* n°**465**. 577-582.

Chalmers A. (1976, 2nd édition 1982) *What is the Thing Called Science? An Assessment of the Nature and Status of Science and its Methods*. Traduction 1987 *Qu'est ce que la science* ? La Découverte Poche

Chevallard Y., Jullien M. (1991) Autour de l'enseignement de la géométrie (première partie) *petit x* n°**27**. 41-76.

Chevallard Y (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* n°**19/2**. 221-266.

Duperret J.C. (2001) Le geste géométrique ou l'acte de démontrer. *Repères-IREM* n°**43**. 83-116

Duval R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactique de Strasbourg* n°**1**. 57-74.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* n°**10.** 5-54

Duval R., Godin M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur la figure. *Grand N* n°**76.** 7-28**.**

Fischbein E (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* n°**24/2.** 139-162.

Fourrey E. (1907) *Curiosités géométriques*. Paris : Vuibert 1994

Gonseth F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Éditions du Griffon.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Géométrie et paradigmes. *petit x* n°**51**. 5-21

Houdement C., Kuzniak A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* n°**20/1**. 89-115.

Houdement C., Kuzniak A. (2003) Quand deux droites sont presque parallèles ou la version géométrique du presque égal. *petit x* n°**61**. 61-74.

Houdement C., Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* n°**11**.175-195.

Keskessa B., Perrin M.J., Delplace J.R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. *Grand N* (à paraître).

Kuhn T.S. (1962, 2nd édition 1970) *The Structure of Scientific Revolutions* Traduction *La structure des révolutions scientifiques* 1983. Paris : Flammarion

Kuzniak A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques* Note d'habilitation. IREM de Paris 7.

Laborde C., Capponi B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°**14/1-2**. 165-210.

Parzysz B. (2002) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du 28è Colloque des Formateurs de Professeurs des Ecoles en mathématiques*. IREM Université de Tours. 99-110

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies.* Paris : Armand Colin

Szabó Á. (1993) *Entfaltung der griechischer Mathematik*. Traduction *L'aube des mathématiques grecques* 2000. Paris : Vrin.

BREVE MULTIMEDIA

Vient d'être numérisé

Un étonnant ouvrage de mathématiques du début du 19ème siècle vient d'êtrenumérisé par le service de documentation de la bibliothèque de Strasbourg. Ils'agit des « Traités élémentaires de Calcul différentiel et de calcul intégral indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites,ouvrage mis à la portée des commençans, et où se trouvent plusieurs nouvellesthéories et méthodes fort simplifiées d'intégration, avec des applicationsutiles aux progrès des Sciences exactes » de J.B.E. Du Bourguet, édités chezCourcier, imprimeur-libraire, à Paris en 1810.

Il est accompagné d'une noticehistorique rédigée par Christian Gerini, MCF en histoire et philosophie dessciences, qui a travaillé sur Du Bourguet dans le cadre de ses recherches surles Annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne (Voir l'article p. 55). On le trouve à l'adresse :

http://num-scd-ulp.u-strasbg.fr:8080