

---

## LE THÉORÈME DE PYTHAGORE, L'ANALYSE MULTIFRACTALE ET LE MOUVEMENT BROWNIEN

---

Jean-Pierre KAHANE  
Université de Paris-Sud à Orsay

*Cet article est extrait des Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui qui paraîtront aux Editions Cassini dans le courant de l'année 1997. Il a été rédigé par Robert DEVILLE à partir d'une conférence donnée par Jean-Pierre KAHANE à l'Université de Bordeaux I le jeudi 11 février 1993.*

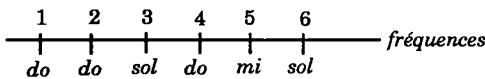
*Il est reproduit avec l'aimable autorisation de Jean-Pierre KAHANE et des Editions Cassini, et grâce à la diligence d'Eric CHARPENTIER de l'Université de Bordeaux I.*

Il est un petit peu paradoxal de commencer une leçon de "Mathématiques d'aujourd'hui" par le théorème de Pythagore. L'idée du théorème de Pythagore m'est venue pour illustrer les problèmes de vulgarisation mathématique. On peut, à partir de ce théorème, faire de nombreux développements. Je vais vous présenter certains d'entre eux, en théorie des ensembles, en analyse multifractale et sur le mouvement brownien. Mais comme j'espère vous en convaincre, on pourrait aller dans bien d'autres directions, c'est un sujet efflorescent.

Commençons par l'histoire et interrogeons-nous sur le "miracle grec". Pythagore a vécu au 6<sup>e</sup> siècle avant Jésus Christ. J'aimerais bien vous donner les dates de naissance et de mort, mais personne ne les connaît. Pythagore était contemporain de Bouddha (-556, -480) et de Confucius (-555, -479) dont on connaît beaucoup de choses, mais l'Inde et la Chine étaient à l'époque des nations anciennes et hautement civilisées, contrairement à cette poussière d'îles de la Grèce ancienne. Pythagore est né dans une de ces îles, Samos. On sait peu de choses sur lui. On

LE THEOREME DE PYTHAGORE

sait qu'il s'est installé en Italie méridionale, à Crotona, où son gendre a été le fameux général Milon de Crotona, et on sait qu'il a été le modèle des dirigeants d'Etat philosophes. Quand Platon pense au rôle des philosophes dans la cité, sa référence est peut-être Pythagore. Mais à vrai dire on a très peu d'éléments sur la vie de Pythagore et sur son œuvre. C'est à peu près à l'époque de Platon ou d'Aristote qu'on commence à avoir des documents écrits sur ce qu'il a pu faire, ce qu'il a pu dire, ce qu'il a pu enseigner. Il reste de l'œuvre de Pythagore au minimum trois choses que nous connaissons tous plus ou moins. C'est la table de Pythagore, le théorème de Pythagore et la gamme de Pythagore. Je vous rappelle que la gamme de Pythagore est la gamme dite naturelle, avec la quinte, qui correspond à des fréquences dans le rapport 3 à 2, la quarte, où le rapport des fréquences est de 4 à 3, et ainsi de suite...



De nos jours, nous avons une façon très simple de représenter les choses, car nous repérons les sons par des fréquences. Pythagore, sans doute, et Platon, sûrement, avaient des façons beaucoup plus compliquées de voir les choses ; mais l'interrogation sur les intervalles musicaux a été une interrogation de mathématiques. Dans la classification de Platon, la musique fait partie des mathématiques et figure en bonne position avec l'astronomie, à la suite de la théorie des nombres, de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace.

Pour tout un chacun, le théorème de Pythagore, c'est  $a^2 + b^2 = c^2$ . D'après certains commentateurs, je pense en particulier à l'article de Grace Young, dans *l'Enseignement Mathématique* publié en 1925, Pythagore avait été intéressé par les triplets de nombres d'entiers  $(a, b, c)$  tels que  $a^2 + b^2 = c^2$ . L'identité  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , ainsi que le triangle correspondant, faisaient partie de la culture du temps. La trace la plus ancienne de cette identité n'est pas matérialisée sous la forme d'un triangle, mais sous la forme d'un cône à base elliptique qui se trouve au British Museum : comme ce cône est Babylonien, Young émet l'hypothèse d'une visite de Pythagore à Babylone. D'un point de vue arithmétique, l'équation  $a^2 + b^2 = c^2$  conduit à des triplets de nombres, par exemple un nombre impair  $n$ , le nombre  $\frac{n^2-1}{2}$  et le nombre  $\frac{n^2+1}{2}$ . Pythagore s'est-il soucié de la démonstration de son théorème ? Nous ne le savons pas. La démonstration d'Euclide apparaît trois siècles plus tard. Cependant, Pythagore et son école ont sans doute observé que l'on ne pouvait pas résoudre cette équation avec  $a = b$  ; c'est à dire que l'équation  $2a^2 = b^2$  n'avait pas de solutions entières.

Cela a été une expérience bouleversante, car ça signifiait que la diagonale d'un carré n'était pas commensurable au côté. Peut-être, c'est une hypothèse que je formule, ressentit-on de façon plus dramatique encore, le fait, équivalent, que l'intervalle d'octave, qui va de 1 à 2, ne peut pas être partagé rationnellement, au sens actuel, en intervalles musicaux égaux. C'est un drame pour la gamme de Pythagore qui a été levé par le clavier bien tempéré. Mais il a fallu attendre longtemps, et il y a de toute façon conflit

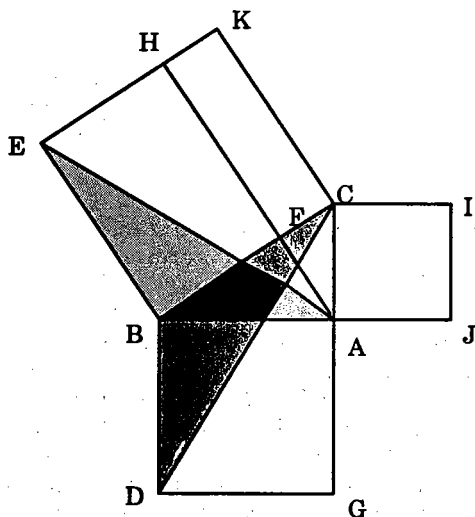
entre la gamme naturelle de Pythagore et la gamme du piano.

En tout cas, à partir de ce moment là, le champ de la théorie des nombres et le champ de la géométrie se sont trouvés radicalement séparés ; et il a fallu, dans l'idéal grec, bâtir la géométrie sur autre chose que la mesure. La géométrie a dès lors reposé sur l'égalité des grandeurs telle qu'elle se trouve exposée dans le traité d'Euclide. La conclusion du livre I d'Euclide est la démonstration du théorème de Pythagore que voici : il s'agit de montrer que si ABC est un triangle rectangle en A, la somme des aires des carrés des petits côtés est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse.

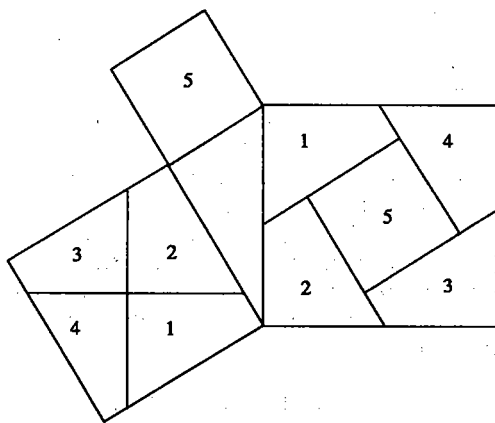
rotation). D'autre part, les triangles FBE et ABE ont des aires égales car ils ont même base et même hauteur. De même les triangles DBA et DBC ont des aires égales. Par conséquent, les triangles FBE et DBA ont même surface, et par suite, la surface du carré ABDG est égale à celle du rectangle EBFH. De même, la surface du carré ACIJ est égale à celle du rectangle CFHK, ce qui permet de conclure.

Cette démonstration était considérée comme très belle par les Grecs, car elle n'utilise que des égalités de triangles. Je vous présente maintenant une autre démonstration qui se trouve dans un très joli petit livre de vulgarisation mathématique de Steinhaus, intitulé "les instantanés mathématiques".

Le triangle rectangle ABC a son hypoténuse verticale



Les triangles ABE et DBC sont égaux d'après le cas d'égalité des triangles tel qu'il est exposé par Euclide (actuellement, ceci peut se voir également à l'aide d'une



Je découpe le carré construit sur le grand côté de l'angle droit à l'aide de

LE THEOREME DE PYTHAGORE

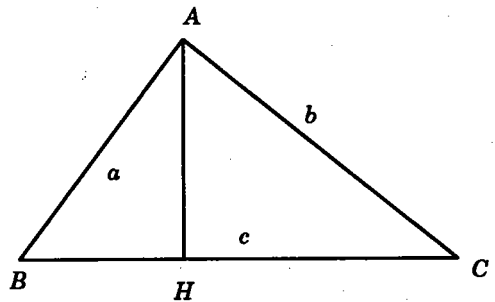
segments verticaux et horizontaux passant par son centre. Je recolle les quatre quadrilatères ainsi obtenus à l'intérieur du grand carré comme indiqué sur la figure. Le carré restant au milieu du grand carré est égal au carré construit sur le petit côté de l'angle droit.

L'intérêt de cette démonstration est qu'elle ne fait intervenir que des translations. Ceci nous amène à la question suivante : étant donné deux figures, peut-on, à partir d'une position de la première figure, et à l'aide de translations, ou plus généralement de déplacements, reconstituer la seconde figure ? Si ces deux figures sont respectivement un carré et un cercle de même surface, le problème ainsi posé, dans les années 20 par Banach et Tarski, s'appelle la quadrature géométrique du cercle. Naturellement, dans ce dernier cas on ne peut pas espérer faire de partitions à l'aide de ciseaux car un disque a une frontière bombée que ne possède pas le carré. Mais peut-être peut-on utiliser des outils plus sophistiqués. Justement, Laczkovitch, un mathématicien hongrois, a donné une réponse positive à cette question en mobilisant la théorie des ensembles (l'axiome du choix) et de la très bonne théorie des nombres. Il a montré que de telles partitions du carré et du disque étaient possibles et que l'on pouvait passer des morceaux du disque aux morceaux du carré par des translations. La construction de Laczkovitch est non mesurable.

Voici enfin une troisième démonstration du théorème d'Euclide, peut-être la plus simple. Elle part de la constatation que dans la démonstration d'Euclide, on aurait pu remplacer des carrés par des demi-disques, des triangles... ou n'importe quel triplet de figures semblables. Et le

théorème de Pythagore exprime que l'aire de la plus grande de ces figures est égale à la somme des aires des deux autres.

La figure la plus simple est celle-ci :

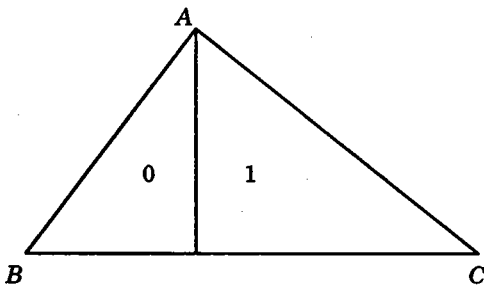


Les trois triangles ABC, ABH et AHC sont semblables et l'aire du plus grand est la somme des aires des deux plus petits. Les aires des triangles ABH AHC et ABC sont proportionnelles à  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  d'où  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ceci est la démonstration la plus claire et la plus explicite du théorème de Pythagore, et je pense qu'Euclide y avait songé. En effet, cette figure se trouve dans le livre 6 d'Euclide, sur les proportions appliquées aux figures planes, tandis que le livre 5 est celui des proportions. On utilise donc dans cette dernière démonstration la synthèse entre la géométrie et la mesure. Pour les grecs, la beauté de la première démonstration d'Euclide réside dans le fait qu'elle n'utilise pas de mesure.

Faisons maintenant un saut vertigineux dans le temps et venons-en au travail de Pólya en 1913. A cette époque, on connaissait déjà les courbes de Peano, Von Koch

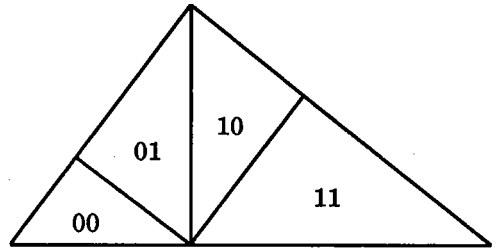
avait construit des courbes que l'on appelle maintenant "flocons de neige" et Cesàro, utilisant les idées de Von Koch, avait construit une variante de la courbe de Peano. Les courbes qui remplissent une aire plane sont des courbes qui ont des points doubles (l'histoire de cela remonte d'ailleurs à la correspondance entre Cantor et Dedekind) et dans la construction de Peano, comme dans celle de Cesàro, il y a des points quadruples. Le propos de Pólya est de donner une construction où il n'y ait plus de points quadruples. Par contre, il y a dans la construction de Pólya des points triples dont on ne peut pas se débarrasser. D'ailleurs, Hurewicz a démontré en 1939 que toute application continue surjective de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+p}$  a des points de multiplicité  $p + 2$ .

Venons en maintenant à la construction de Pólya. Dans la troisième démonstration du théorème de Pythagore, nous avons divisé le triangle ABC en deux triangles semblables suivant la hauteur :



Pour nous repérer, numérotons 0 le petit triangle et 1 le grand triangle et recommençons l'opération avec chacun des petits triangles.

Nous obtenons ainsi la figure suivante :



Pour mieux nous y retrouver, nous allons diviser le segment  $[0,1]$  dyadiquement de la même façon que nous partageons notre rectangle à l'aide de hauteurs.

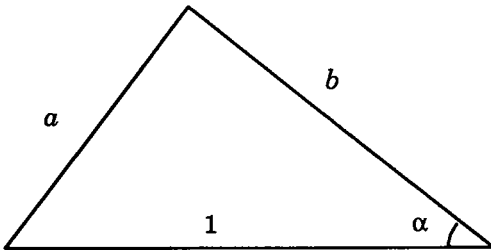


En continuant de cette façon, on associe, à chaque point du segment  $[0,1]$ , une suite d'intervalles dyadiques emboîtés décroissants, auxquels vont correspondre des triangles emboîtés décroissants, donc à tout point  $t \in [0,1]$ , on associe un point  $x(t)$  du triangle.

Inversement, pour tout point  $x$  du triangle, on peut résoudre l'équation  $x(t) = x$ . Ceci montre que l'application  $t \mapsto x(t)$  ainsi construite est une application surjective de  $[0,1]$  sur le triangle. Cette application est continue et est donc du type courbe de Peano, et, en choisissant convenablement les angles du triangle, on s'aperçoit qu'il n'y a pas de points quadruples.

LE THEOREME DE PYTHAGORE

Voici maintenant trois aspects de cette courbe-là. Tout d'abord, Peter Lax en 1973 s'interroge sur la fonction  $t \rightarrow x(t)$ . Quand le triangle est rectangle isocèle, on retrouve la courbe de Cesàro dont on sait qu'elle n'est nulle part dérivable avec une homogénéité très forte. La question est de savoir si, quel que soit l'angle du triangle, on obtient une fonction non dérivable. La réponse est non ! On peut faire une statistique de la taille des triangles obtenus dans la construction ci-dessus : si je suppose que le petit côté est égal à  $a$ , que le grand côté est égal à  $b$  et que la longueur de l'hypoténuse,  $\sqrt{a^2+b^2}$ , est égale à 1, on a :  $\alpha = \sin \alpha$ .



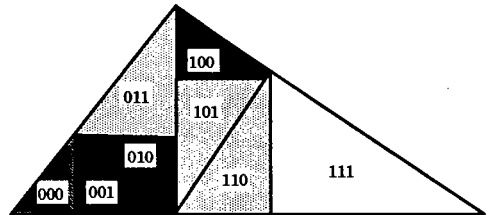
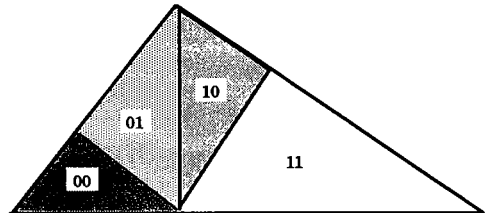
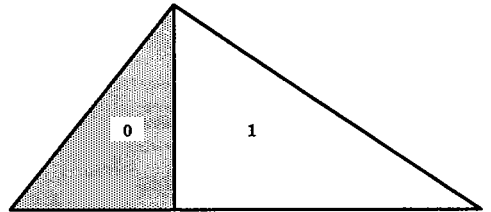
A la  $n^{\text{ième}}$  étape, on aura construit des triangles dont la longueur des hypothénuses sera  $a^{n-k} b^k$ , pour  $k = 1, 2, \dots, n$ . Selon la valeur de  $a$  par rapport à  $\frac{1}{2}$  et la valeur de  $\sqrt{a b}$  par rapport à  $\frac{1}{2}$ , on peut discuter de la dérivabilité de la fonction  $x(t)$ . En fait on peut montrer, et c'est un bon exercice du niveau du 1er cycle, que :

- si  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ , la fonction  $x(t)$  est partout non dérivable,
- si  $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ , la fonction  $x(t)$  est non

dérivable presque partout, et a une dérivée nulle sur un ensemble ayant la puissance du continu,

- si  $\alpha < \frac{\pi}{12}$ , la fonction  $x(t)$  admet une dérivée nulle presque partout.

Le deuxième aspect, un peu plus riche, est celui de la statistique de la taille des triangles construits. Nous allons illustrer ce point de vue en coloriant des triangles, et la règle du jeu sera de colorier à chaque étape le petit triangle, mais pas le grand, de sorte qu'à chaque étape, plus un triangle est petit et plus il est foncé (et plus un triangle est grand, plus il est clair).



Et on itère indéfiniment le coloriage. On

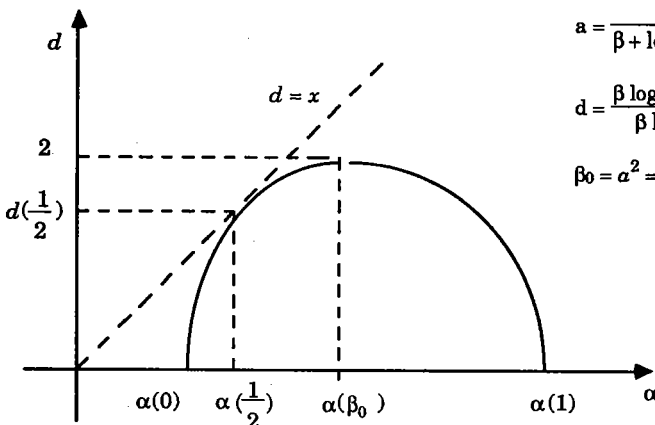
veut savoir quelle est la couleur moyenne, quelle est la dimension de l'ensemble sur lequel on a la couleur moyenne, quelle est la dimension des ensembles sur lesquels on a différentes couleurs, etc... Sans rentrer dans les détails, quelle va être la base des calculs à effectuer pour répondre aux questions ci-dessus ? On a des temps à l'étape  $n$  dont les accroissements sont  $\Delta t = 2^{-n}$ , et des accroissements d'espace correspondants du type  $\|\Delta\| = a^{n-k} b^k$ , et tout dépendra du nombre de 0 dans le développement dyadique du point  $t$  considéré. S'il y a une fréquence donnée des 0 dans les points  $t$  que nous considérons, on pourra dire que  $\beta = \lim_n \frac{k}{n}$  représente le niveau de la couleur. Ici  $k$  est le nombre de zéros parmi les  $n$  premiers chiffres du développement dyadique de  $t$ . (Nous n'étudierons pas ici les points dyadiques où le développement dyadique de  $t$  n'est pas unique, ni les points où cette limite n'existe pas - il faudrait parler alors de fréquence inférieure et de fréquence supérieure). Le paramètre  $\beta$  varie entre 0 et 1. Suivant les valeurs de ce paramètre, nous étudierons deux choses : tout d'abord, on peut se

demander de quelle façon  $\Delta t$  dépend de  $\Delta x$ . On peut montrer que  $\Delta t = \|\Delta x\|^\alpha$ , où  $\alpha$  est une certaine fonction de  $\beta$ .

Ensuite, nous pouvons regarder la dimension de l'ensemble  $E_\alpha$  où cette relation est réalisée, c'est-à-dire où le niveau de la couleur est égal à  $\beta$ . La dimension  $d = \dim E_\alpha$  que nous considérons ici est la dimension de Hausdorff. La dimension de Hausdorff a deux définitions équivalentes, dont l'une convient bien pour la majorer et l'autre pour la minorer :

$\dim E$  est l'inf des  $r > 0$  tel qu'il existe un recouvrement infini de  $E$  par des boules  $B_n$  ( $E \subset \lim m B_n$ ) de sorte que  $\sum (\text{diam } B_n)^r < \infty$ ; et  $\dim E$  est le sup des  $s > 0$  tel que  $E$  porte une mesure de probabilité  $\mu$  höldérienne d'ordre  $s$ , c'est à dire que  $\mu(B) \leq c (\text{diam } B)^s$  pour toute boule  $B$ , avec  $c = c(\mu)$ .

Remarquons que  $d = \dim E_\alpha$  est aussi une fonction de  $\beta$ . Quand on étudie  $(\alpha(\beta), d(\beta))$  lorsque  $\beta$  varie entre 0 et 1, on obtient la courbe ci-dessous :



$$a = \frac{-\log 2}{\beta + \log a + (1 - \beta) \log b}$$

$$d = \frac{\beta \log \beta + (1 - \beta) \log (1 - \beta)}{\beta \log a + (1 - \beta) \log b}$$

$$\beta_0 = a^2 = 1 - b^2$$

LE THEOREME DE PYTHAGORE

La valeur  $\beta_0$  correspond à la couleur dominante puisque la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $E_{\alpha(\beta_0)}$  correspondant est égal à 2. Il y a deux points de vue : tout d'abord ce qui se passe dans la plus grande partie du triangle correspondant à  $\beta = \beta_0$  et à  $d = 2$  ; ensuite, ce qui se passe pour la plupart des paramètres, c'est à dire lorsque  $\beta = \frac{1}{2}$  (en vertu de la loi des grands nombres).

Cela signifie que la mesure de paramètre sur la courbe aura une dimension égale à  $\alpha(\frac{1}{2}) = d(\frac{1}{2})$ , pour une définition convenable de la dimension de la mesure.

La courbe que nous avons tracée ci-dessus se trouve maintenant dans les livres sur les fractals et s'appelle l'analyse multifractale de la mesure de paramètre (qui est ici la mesure  $dt$  sur  $[0,1]$ ). Nous avons donc présenté l'exemple le plus simple d'analyse multifractale. De façon plus générale, l'analyse multifractale d'une mesure consiste à regarder, sur les différents points du support de la mesure, quel est le caractère hölderien de cette mesure au voisinage de ce point : on regarde tout ce qui correspond à un certain exposant de Hölder, on cherche sa dimension et c'est l'analyse de cette dimension en fonction de l'exposant de Hölder qu'on appelle l'analyse multifractale de la mesure. Ce sujet n'a pas été inventé par les mathématiciens. C'est un sujet très récent qui nous vient de la physique. Les premiers physiciens à avoir parlé explicitement d'analyse multifractale sont Uriel Frisch et Parisi il y a une dizaine d'années. Simultanément Benoît Mandelbrot, sans y donner de nom, en avait eu clairement l'idée. L'analyse multifractale a envahi la physique, car les physiciens ont découvert les

mesures à l'occasion des systèmes dynamiques et des mesures invariantes. Le grand jeu, quand on a une mesure invariante par un système dynamique, est d'essayer de retrouver la dynamique par l'analyse de la mesure. Justement, l'analyse multifractale est un procédé pour récupérer la dynamique.

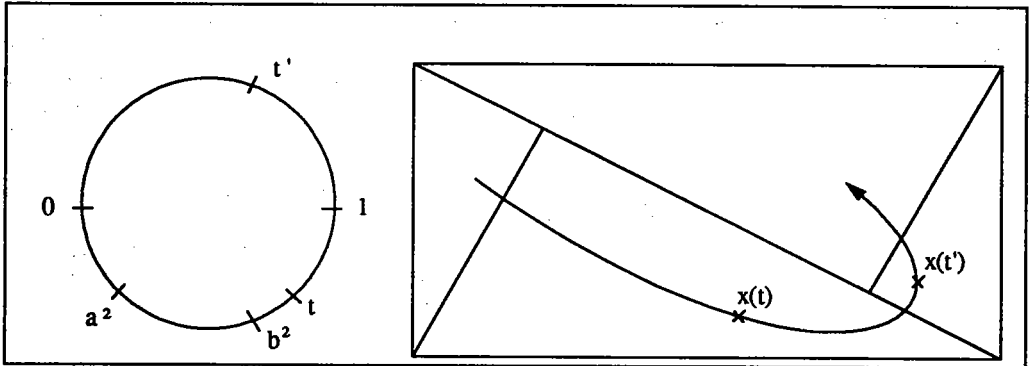
L'analyse multifractale est donc un sujet étudié par d'éminents physiciens, et il est mathématiquement très bien posé. Le travail le plus clair là-dessus est un article sur l'analyse multifractale des mesures (il est clair que cette analyse n'est possible que sous certaines conditions sur la mesure) écrit par Brown, Michon et Peyrière [BMP].

Nous avons, dans un premier temps, étudié les propriétés de différentiabilité de la courbe de Pólya; puis l'étude statistique de la taille des triangles intervenant dans la courbe de Pólya nous a mené à l'analyse multifractale des mesures. Venons-en maintenant à un troisième aspect, qui va nous conduire au mouvement Brownien.

Supposons que dans la courbe de Pólya on change de paramétrage de telle sorte que le nouveau paramètre soit proportionnel à la mesure d'aire. Comment réaliser ce paramétrage ? Il suffit pour cela de subdiviser l'intervalle  $[0,1]$  en un intervalle de longueur  $a^2$  et un autre de longueur  $b^2$  (avec  $a^2 + b^2 = 1$ ). En reproduisant cela à chaque étape, on obtient un paramétrage proportionnel à la mesure d'aire parcourue. L'analyse multifractale aurait alors été différente, et d'ailleurs évidente ( $E_\alpha = \emptyset$  pour  $\alpha \neq 2$ ).

Si maintenant, on recolle deux triangles rectangles pour former un rectangle, et si on associe à chacun de ces deux triangles





une courbe de Pólya munie de ce nouveau paramétrage, on obtient une courbe tracée sur le rectangle en recollant les deux intervalles de temps de manière à obtenir un paramétrage circulaire du rectangle (ci-dessus).

un nombre fini de points dans un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ . Peut-on joindre ces points au moyen d'une ligne polygonale fermée de telle sorte que la somme des carrés des côtés soit majorée par un nombre indépendant du nombre de points qu'on a choisis ?

On peut vérifier à titre d'exercice que le carré de la distance entre deux points est inférieur ou égal à la distance sur le cercle des paramètres :

$$\| x(t) - x(t') \|^2 \leq d(t, t')$$

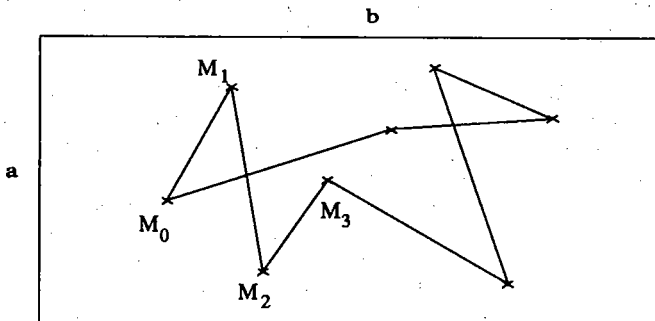
La réponse est oui : on peut construire cette ligne polygonale fermée de telle sorte que la somme des carrés des côtés de la ligne soit inférieure à la somme des carrés des côtés du rectangle, c'est à dire

$$\sum (M_n M_{n+1})^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

On aura égalité par exemple quand  $x(t)$  et  $x(t')$  sont en deux sommets du rectangle.

Pour démontrer cela, il suffit de numéroter les points d'après l'ordre où on les trouve sur la courbe de Pólya, et on utilise la propriété observée ci-dessus. Cette

Considérons maintenant l'exercice suivant (figure ci-dessous) : on considère



---

 LE THEOREME DE PYTHAGORE
 

---

construction est entièrement algorithmique : il suffit pour cela d'effectuer les premières étapes de la construction de la courbe de Pólya jusqu'à ce que les triangles rectangles de la subdivision séparent les points donnés. J'ajouterai que, comme je crois que la démonstration de ce résultat est optimale, on peut sans doute prendre cet exercice pour introduire la courbe de Pólya.

On peut se demander quelle est la solution de cet exercice lorsqu'on prend d'autres formes que le rectangle ? Je ne sais à peu près rien là-dessus.

Le problème posé dans cet exercice rappelle celui du voyageur de commerce, dans lequel on cherche à minimiser la longueur totale que le voyageur aura à parcourir s'il doit passer en un nombre fini de points. Ce qui importe dans le problème du voyageur de commerce, c'est d'obtenir une majoration de la somme des côtés et non des carrés des côtés. Observons tout d'abord que la solution de l'exercice précédent apporte une réponse qui n'est pas si mauvaise au problème du voyageur de commerce. En effet, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient une majoration de l'ordre de  $\sqrt{n}$  de la somme des côtés. La deuxième observation, plus importante, est que la variation quadratique est la clef du mouvement Brownien que nous allons présenter maintenant.

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, un botaniste anglais, Brown, a observé le mouvement désordonné des particules de pollen en suspension dans un liquide. Brown avait analysé ce mouvement, qui était perpétuel, violant ainsi les lois jusqu'alors connues de la physique, et c'était un mouvement d'autant plus rapide que les particules étaient petites. Là s'arrête la botanique.

Au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, ce phénomène a été étudié par les physiciens qui ont multiplié les observations, et qui ont même fait des conjectures tout à fait intéressantes, comme le fait que ce mouvement désordonné pouvait être la résultante de chocs moléculaires. Einstein en 1905 publie trois papiers dans *Annalen der Physik* : un sur la relativité restreinte, un sur l'effet photoélectrique et un sur le mouvement brownien. Einstein avait une force, qui était de ne pas être encombré par des connaissances livresques. Il avait vaguement entendu parler du mouvement brownien, mais le titre de son article n'est pas "Etude du mouvement brownien". C'est un titre interminable : "sur le mouvement créé nécessairement par l'agitation moléculaire sur les particules en suspension dans un liquide". Ce qui l'intéresse est une question de thermodynamique : est-ce que les liquides obéissent à la thermodynamique classique, ou à la thermodynamique statistique de Boltzmann qui a fait ses preuves pour les gaz ? Einstein dit que le mouvement qu'il décrit est peut-être lié au mouvement brownien, mais qu'il n'a pas suffisamment d'informations sur ce sujet pour l'affirmer. Nombreux sont ceux qui répondent que c'est bien le mouvement brownien ! Il écrit alors un second article : puisque ce mouvement a déjà été observé, c'est un moyen de calculer les dimensions moléculaires. Message saisi, par Jean Perrin.

La thèse de Jean Perrin, dont le sujet est la détermination du nombre d'Avogadro, met en œuvre des expériences dont la plupart utilisent la théorie d'Einstein du mouvement brownien. Cette thèse est magnifiquement exposée dans un article de 1909 dans les *Annales de Physique et Chimie*, et en 1913 dans un livre intitulé *Les Atomes*, qui est un des grands livres du

siècle. Jean Perrin y décrit soigneusement le mouvement brownien, donne des reproductions photographiques, dit que, plus on observe finement le mouvement sur des intervalles de temps très courts et plus le mouvement paraît désordonné et que c'est un cas où on est forcé de penser aux fonctions continues sans dérivées des mathématiciens. Ceci a été très important pour les mathématiciens. Le mouvement brownien est resté un sujet intéressant pour les physiciens. Signalons en particulier la thèse de Francis Perrin, le fils de Jean Perrin, sur le mouvement brownien de rotation. Mais à partir de 1920, sous l'influence de Norbert Wiener, le mouvement brownien devient un sujet mathématique. Je n'ai pas mentionné un certain nombre de contributions importantes dans l'histoire du mouvement brownien : disons seulement que, Smoluchowsky, en même temps qu'Einstein, fait la théorie du mouvement brownien, et que c'est Bachelier qui, dans la théorie de la spéculation, avait prouvé le rôle de la variation quadratique.

De 1920 à 1933, Norbert Wiener va élaborer la théorie mathématique du mouvement brownien et va réaliser le programme de Jean Perrin : la théorie mathématique du mouvement brownien doit rendre compte de la non dérivabilité observée des trajectoires browniennes. Les recherches sur ce sujet se poursuivent après 1933, mais la prochaine contribution qui marquera l'histoire est celle de Paul Lévy. Il était fasciné par le mouvement brownien, et si vous voulez vous-même être fasciné par le mouvement brownien, il vous faut lire le *Mémorial* de Paul Lévy sur le mouvement brownien plan.

Le statut du mouvement brownien a changé depuis Paul Lévy. Dans les années

50-60, moins d'un mathématicien sur 20 aurait été capable de donner une définition mathématique du mouvement brownien. C'était un objet un peu étrange, qui appartenait à cette branche des mathématiques pas encore entièrement reconnue qu'étaient les probabilités. De nos jours, la variété des applications du mouvement brownien a fait qu'il est devenu un objet de culture courante. Son étude reste un sujet d'actualité. Je citerai, en particulier, le travail des probabilistes français : par exemple Revuz et Yor, qui ont écrit le meilleur livre récent sur les martingales continues et le mouvement brownien, et Le Gall qui a écrit un cours splendide sur le mouvement brownien plan à Saint-Flour et est le meilleur spécialiste français du super-brownien.

Avant de dire un mot sur les derniers développements concernant le mouvement brownien, revenons à Einstein et à Wiener, et voyons quelle est la relation avec la courbe de Pólya. La grande idée d'Einstein est que la clef du mouvement brownien est la comparaison entre la variation quadratique des déplacements et la variation du temps. Einstein considère l'évolution, non pas d'une particule, mais d'un nuage de particules. Ceci est très proche de la théorie de la diffusion. Un nuage de particules est décrit par une variable gaussienne (cette variable dépend des coordonnées de chacun des points du nuage, qui sont en très grand nombre, et on peut donc considérer qu'elle est dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension infinie de variables gaussiennes). Notons  $X(t)$  cette variable gaussienne à l'instant  $t$ . La loi fondamentale d'Einstein est

$$E(X(t) - X(t'))^2 = |t' - t|.$$

Nous reconnaissons ici la variation

LE THEOREME DE PYTHAGORE

quadratique déjà évoquée lors de l'étude de la courbe de Pólya; mais ici, nous n'avons pas seulement l'inégalité; nous avons aussi l'égalité. Le point  $X(t)$  décrit une courbe dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et cette courbe est superbe : prenons trois valeurs du temps  $t_0, t_1, t_2$  auxquelles on fait correspondre trois points de la courbe  $X_0, X_1, X_2$ .

$$t_0, t_1, t_2 \mapsto X_0, X_1, X_2$$

Supposons pour fixer les idées, que  $t_0 < t_1 < t_2$ .

Comme

$$\|X_0 - X_1\|^2 = t_1 - t_0,$$

$$\|X_1 - X_2\|^2 = t_2 - t_1$$

et  $\|X_2 - X_1\|^2 = t_2 - t_0,$

on en déduit immédiatement que

$$\|X_0 - X_1\|^2 + \|X_1 - X_2\|^2 = \|X_0 - X_2\|^2.$$

Cette courbe, qu'on appelle une hélice, a donc la propriété remarquable suivante : quand on choisit trois points sur la courbe, ils déterminent toujours un angle droit. L'interprétation physique de cette propriété du mouvement brownien est la suivante : ce qui se passe après  $X_1$  est orthogonal à ce qui se passe avant  $X_1$ , c'est-à-dire que les accroissements du futur sont indépendants du passé (l'orthogonalité, c'est l'indépendance). Cette hélice est une courbe extrêmement lisse, qui a pour dimension 2 et dont la mesure de Hausdorff en dimension 2 est égale au paramètre. Elle est construite dans un espace de Hilbert et il n'en existe pas de version en dimension finie, il n'existe en dimension finie que des versions approximatives (d'ailleurs fort intéressantes).

De plus, la construction effective de cette courbe n'est pas difficile : il suffit en effet

de la construire dans n'importe quel espace de Hilbert et de la transporter par isométrie dans un espace de Hilbert de variables gaussiennes. Nous prendrons donc l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^+)$  et la fonction  $X(t)$  sera  $X_{[0, t]}$ .

Si  $t_0 < t_1 < t_2$  la fonction  $X_{[t_1, t_2]}$  est bien orthogonale à  $X_{[t_0, t_1]}$  et on aura toutes les propriétés de l'hélice brownienne. L'image de la courbe  $t \mapsto X_{[0, t]}$  par une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans un espace de Hilbert de variables gaussiennes décrit donc un mouvement brownien.

Nous venons de décrire ce qu'on peut considérer aujourd'hui comme l'étape "Einstein" de la construction du mouvement brownien. L'étape "Wiener" consiste à expliciter  $X(t, w)$  et à étudier les propriétés des trajectoires  $t \rightarrow X(t, w)$ . Sous sa forme finale (1933) elle consiste à prendre une base orthonormée  $(u_n)$  de  $L^2([0, 1])$ , à la transporter à l'aide d'une isométrie en une base  $(\xi_n)$  de  $\mathcal{H}$  qu'on appelle une suite normale. On développe  $X_{[0, t]}$  dans la base  $(u_n)$  :

$$X_{[0, t]} = \sum \varphi_n(t) u_n,$$

et on transporte cette décomposition, par isométrie, de  $L^2([0, 1])$  dans  $\mathcal{H}$

$$X(t, w) = \sum \varphi_n(t) \xi_n(w).$$

On a ainsi ramené l'étude du mouvement brownien à l'étude d'une série de fonctions dont les coefficients sont des gaussiennes indépendantes centrées. Le programme de Wiener est alors d'étudier les propriétés presque sûres de la somme ainsi définie. On démontre par exemple qu'il y a convergence uniforme, et ceci nous fournit une version presque sûrement continue du mouvement brownien. On démontre que pour presque tout  $w$ , on

*obtient une fonction non dérivable : ceci est le résultat obtenu par Wiener en collaboration avec Paley et Zygmund, et constitue l'achèvement du programme de Wiener-Perrin.*

Passons maintenant en revue quelques points concernant le brownien. Tout d'abord, y a-t-il une analyse multifractale du brownien ? En un certain sens, oui, et elle a précédé toutes les autres. Il y a des points du mouvement brownien où on trouve un comportement donné par une célèbre loi de Khintchine qui s'appelle la loi du logarithme itéré. Ceci donne le comportement moyen, et Paul Lévy s'était demandé si c'était le comportement partout : la réponse est non ; il y a des points qui sont un peu plus rapides et d'autres qui sont un peu plus lents, et ces variations sont maintenant connues de façon très précise.

Un autre aspect est constitué par les propriétés géométriques du mouvement brownien plan. Le point de départ est un théorème de Paul Lévy : le mouvement brownien plan couvre un ensemble dont l'aire est nulle, mais dont la dimension de Hausdorff est égale à 2. Le cours de Le Gall donne un excellent exposé des résultats récents et des conjectures actuelles sur le mouvement brownien plan.

En ce qui concerne l'actualité du mouvement brownien, signalons deux choses :

La chaire Aisenstadt de l'université de Montréal est occupée cette année par Eugène Dynkin qui fait un cours sur la théorie du "super brownien", qui décrit l'évolution de particules qui explosent : tandis que le mouvement brownien est lié à l'équation de la diffusion (faisant intervenir le Laplacien), le super brownien est lié à l'équation de Schrödinger (faisant intervenir le Laplacien moins un potentiel).

La deuxième chose est un jeu auquel se livrent des physiciens et des mathématiciens sans qu'on sache où se trouve la théorie mathématique. On prend du sulfate de cuivre en solution, susceptible de se déposer sur une cathode. Un dépôt de cuivre se forme sur la cathode : ce sont les particules de cuivre, qui sont en première approximation des particules browniennes, qui viennent se coller sur la cathode. Ce dépôt a une structure qui devient de plus en plus complexe et forme ainsi une végétation qui porte le nom de DLA (Diffusion Limited Agregation). L'approche de la théorie mathématique (qui reste à construire) est la suivante : le mouvement brownien se dépose sur un obstacle suivant la mesure harmonique de cet obstacle. Mais au fur et à mesure qu'il y a dépôt, l'obstacle se modifie, la mesure harmonique aussi, c'est donc la dynamique de la mesure harmonique qui est en cause et ceci reste un sujet mystérieux.

## QUESTIONS

1.- *Pour quels ensembles de points le problème du voyageur de commerce a-t-il une solution ?*

Les travaux de Peter Jones et de Guy David ont récemment contribué à éclairer la question. Ils ont établi en gros l'équivalence entre la solution du problème du voyageur de commerce et le problème de l'immersion d'un ensemble de dimension de Hausdorff 1, convenablement choisi, sur une courbe rectifiable. Il y a des ensembles de dimension 1 et de mesure de Hausdorff finie qui sont portables par des courbes rectifiables, mais il y en a d'autres qui ne le sont pas : par exemple le carré de l'ensemble de Cantor est de dimension 1/2 mais n'est pas portable par une courbe rectifiable. Pour des résultats plus précis, il faut par exemple consulter Guy David.

2.- *Quelle est l'origine du problème de la quadrature géométrique du cercle et peut-on obtenir cette quadrature  $b$  à l'aide de partitions mesurables ?*

Voici un paradoxe de la théorie des ensembles qui est décrit dans le livre de Hausdorff : il existe une partition d'une boule en trois parties telles que chacune soit égale par déplacement à la réunion des deux autres. Une telle construction ne peut évidemment pas être mesurable, elle repose sur l'axiome du choix. Ceci constitue une preuve qu'il n'existe pas de notion de volume, au sens additivité finie, dans l'espace à 3 dimensions. Banach et Tarski ont en fait montré qu'étant donné deux corps dans un espace à plus de 3 dimensions, il existe toujours une partition de l'un et une partition de l'autre de telle sorte qu'on passe de l'un à l'autre par des déplacements des éléments de la partition. Ceci constituait un succès pour l'axiome du choix. Dans le même article, on trouve une conséquence encore plus spectaculaire de l'axiome du choix : le résultat ci-dessus n'est pas vrai dans la droite et dans le plan. En effet, il résulte de l'axiome du choix, au travers du théorème de Hahn Banach et de son application à l'existence des limites de Banach, qu'il existe des notions de mesures finiment additives dans la droite et dans le plan. Il en résulte que si un carré et un disque n'ont pas la même surface, on ne peut pas trouver de partitions qui permettent de passer de l'un à l'autre par des déplacements. C'est pour cela que Banach et Tarski se sont demandé si une telle partition était possible lorsque le carré et le disque avaient la même surface.

Il est nécessaire dans la construction de Laczkovich que les partitions soient non mesurables. Mokobodzki m'a communiqué la variante suivante : au lieu de faire une partition (qui n'est autre qu'une décomposition de la fonction indicatrice en somme de fonctions indicatrices), on décompose la fonction indicatrice en somme de fonctions à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Une telle décomposition peut-être rendue mesurable.

3.- *Beaucoup de théorèmes en analyse harmonique, Théorie des fonctions, etc.... ont des démonstrations qui utilisent les idées de théorie des probabilités. Il s'agit de théorèmes d'existence, de constructions de contre exemples... Par exemple le théorème de Malliavin sur l'absence de synthèse spectrale. Pensez-vous qu'il existe une raison expliquant ce phénomène ?*

Tout d'abord on peut dire que la théorie des fonctions d'une variable complexe et la théorie du mouvement brownien plan sont deux théories isomorphes. En effet le mouvement brownien plan, c'est le mouvement d'un ivrogne dans le plan. Si maintenant on fait une transformation conforme du plan, localement, l'ivrogne verra toujours les directions de la même façon. C'est simplement la loi du temps qui va être changée. Une transformation conforme transforme donc un ivrogne brownien en ivrogne brownien. Si vous voulez par exemple montrer que les trajectoires du mouvement brownien sont d'aire nulle (ce résultat est dû à Paul Lévy), il suffit de dire que le mouvement brownien ne touche pas un point donné du plan (presque sûrement). Par le théorème de Fubini, l'ensemble des points du plan qu'il touche est un ensemble de mesure nulle. Pour montrer que le mouvement brownien n'atteint pas le point  $a$ , il suffit de transformer le mouvement brownien par  $e + a$ .

Inversement on peut utiliser le mouvement brownien pour démontrer des résultats d'analyse complexe : Davies a donné une démonstration du théorème de Picard en utilisant les enroulements du mouvement brownien autour de 2 points. Les propriétés des martingales et les temps d'arrêt du mouvement brownien peuvent être utilisés pour définir et étudier les espaces  $H^p(\mathbb{D})$ .

Les probabilités sont aussi un outil utile en analyse harmonique. Il y a en effet dans ce domaine des théorèmes dont les seules démonstrations connues à ce jour sont probabilistes. Par exemple considérons des sphères et des cubes : du point de vue topologique, ils sont homéomorphes, et ils ont même dimension. Mais ils n'ont pas les mêmes propriétés harmoniques. En effet toute mesure non nulle à support dans la frontière du cube possède une transformée de Fourier qui ne tend pas vers 0 à l'infini (pour voir cela, il suffit d'observer que la projection sur au moins une des coordonnées du cube fournit une mesure qui comportera deux masses de Dirac : la transformée de Fourier de la mesure ne tend donc pas vers 0 à l'infini dans cette direction). Par contre, la sphère porte une mesure dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini : la mesure d'aire a une transformée de Fourier qui tend vers 0 à l'infini comme une certaine puissance négative de la distance à l'origine et cette puissance dépend de la dimension de la sphère. De plus, il n'existe pas de mesure portée par la sphère dont la transformée de Fourier tendrait vers 0 à l'infini plus vite que la transformée de Fourier de la mesure d'aire. Beurling avait demandé à Salem : pourriez-vous construire un ensemble dont la dimension soit comprise entre 0 et 1 et qui porte une mesure dont la transformée de Fourier tende vers 0 à l'infini aussi vite que c'est permis par la dimension ? Salem a fourni un tel exemple en utilisant de la géométrie, de

LE THEOREME DE PYTHAGORE

l'arithmétique, de l'analyse et des probabilités. On peut en fait éviter tous les arguments non probabilistes et ne conserver que l'argument suivant : l'image d'un ensemble quelconque de mesure positive par le mouvement brownien est un ensemble qui répond au problème de Beurling. En fait, le même type de phénomène se produirait en remplaçant le mouvement brownien par n'importe quel processus aléatoire raisonnable.

4.- *Quelle est donc l'explication de la puissance des arguments probabilistes en analyse ?*

Les probabilités ont pour effet d'effacer les résonances, de mélanger les fréquences, de lisser les choses et de les rendre rondes. En opposition, la théorie de Baire exalte les résonances, c'est la théorie de condensation des singularités. Vous appliquez la théorie de Baire à l'image continue d'un ensemble de Cantor et vous obtenez un ensemble du type carré. Telle est ma vue de la question.

5.- *Pourriez-vous préciser la définition du mouvement brownien ?*

Le mouvement brownien, c'est une hélice brownienne dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de variables gaussiennes centrées. Un espace de Hilbert de variables gaussiennes est un sous-espace fermé de  $L^2(\Omega)$ , où  $(\Omega, \Sigma, \rho)$  est un espace de probabilité, constitué par des fonctions, appelées variables aléatoires, de moyenne nulle et dont la fonction caractéristique  $\mathbb{E}(e^{itX})$  est égale à  $e^{-1/2 t^2}$ . Le schéma abstrait du mouvement brownien, l'hélice brownienne, est donc une famille de variables gaussiennes et la théorie mathématique du mouvement brownien est la réalisation de versions de ce processus abstrait. On définit donc une famille  $X(t, \omega)$  telle que  $\omega \mapsto X(t, \omega)$  est une variable gaussienne et  $t \mapsto X(t, \omega)$  décrit la trajectoire très bizarre d'une particule. Il y a un contraste fascinant pour les probabilistes, entre la régularité de la figure abstraite (l'hélice brownienne) et l'extrême irrégularité des trajectoires pour presque tout  $\omega$ . Plus généralement, un processus gaussien est une figure abstraite dans  $\mathcal{H}$ . Kolmogorov a demandé, il y a quelques années, si la donnée de cette figure abstraite permet de conclure qu'il existe des versions presque sûrement bornées, ou presque sûrement continues. Ce problème a été résolu par Talagrand : tout d'abord, étant donné une suite  $(g_n)$  de variables gaussiennes (c'est à dire une suite dans  $\mathcal{H}$ ), on peut donner des conditions sur  $(\|g_n\|)$  pour que presque sûrement, le processus correspondant soit borné. Il est élémentaire de vérifier que, si  $(\|g_n\|)$  décroît plus vite que  $(\frac{1}{\sqrt{\log n}})$ ,

alors presque sûrement, le processus correspondant est borné. Quand une figure dans  $\mathcal{H}$  possède une réponse positive au problème de Kolmogorov, le convexe engendré possède aussi une réponse positive : en effet une combinaison linéaire convexe de variables aléatoires bornées est bornée. Le théorème de Talagrand dit que les seuls processus bornés sont ceux qui sont inclus dans les convexes engendrés par les suites



$(g_n)$  telles que le processus correspondant soit borné. Ce très beau théorème apporte une réponse complète à la question de Kolmogorov, mais est inutilisable en pratique; c'est pourquoi les réponses antérieures à cette question, qui donnaient plus modestement des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes au problème de Kolmogorov, n'ont pas perdu de leur intérêt.

6.- *Quelle doit être la place des probabilités dans les mathématiques d'aujourd'hui ?*

Il y a un aspect un peu rébarbatif de la théorie des probabilités qui consiste à traduire en termes probabilistes les résultats de la théorie de la mesure. Mais les probabilités ne se résument pas à cela. Il y a une quarantaine d'années, les mathématiciens étaient très formalistes et n'avaient que peu de considération pour les travaux de Paul Lévy : pour eux les résultats de Paul Lévy étaient soit incorrects, soit non démontrés. En fait pour comprendre les probabilités, il faut, comme en physique, se laisser porter par l'intuition. Ce n'est qu'*a posteriori* qu'il faut formaliser les objets probabilistes. Des connaissances en probabilités font maintenant partie de la culture de base des mathématiciens d'aujourd'hui. Il ne me semble pas raisonnable, par exemple, de tout ignorer du mouvement brownien.

7.- *Beaucoup de théorèmes d'analyse ont d'abord été montrés à l'aide des probabilités : pensez-vous que cela provient du fait que la théorie des probabilités fournit une meilleure intuition pour conjecturer et démontrer des résultats ?*

Je citerai une anecdote à propos de Kakutani qui a beaucoup contribué à l'étude du mouvement brownien. Quand on demandait à Kakutani si un ensemble construit à la manière de l'ensemble de Cantor est de capacité positive, il prenait une feuille de papier, dessinait l'ensemble, et simulait le mouvement brownien pour savoir si la trajectoire allait être accrochée ou pas par l'ensemble : si le mouvement brownien est accroché, l'ensemble est de capacité positive, sinon il est de capacité nulle. Makarov a aussi cette vision des choses. Un des théorèmes récents les plus significatifs sur les mesures harmoniques est le suivant : étant donné un domaine délimité par une courbe, la courbe pouvant avoir une dimension arbitraire (par exemple égale à 2), la mesure harmonique de ce domaine est portée par un ensemble de dimension 1. L'idée intuitive de la démonstration est de considérer un mouvement brownien dans  $\Omega$  et de regarder où il s'accroche : il est accroché par les parties exposées, et on peut démontrer que les parties exposées forment un ensemble de dimension 1. Naturellement la démonstration complète de ce résultat est en fait longue et difficile.

8.- *Quelles sont les applications du mouvement brownien en physique ?*

Le mouvement brownien intervient partout ! Le livre de B. Simon *Functional Analysis and Quantum physics* montre bien l'utilité du mouvement brownien en physique quantique. Le mouvement brownien intervient dans les problèmes de

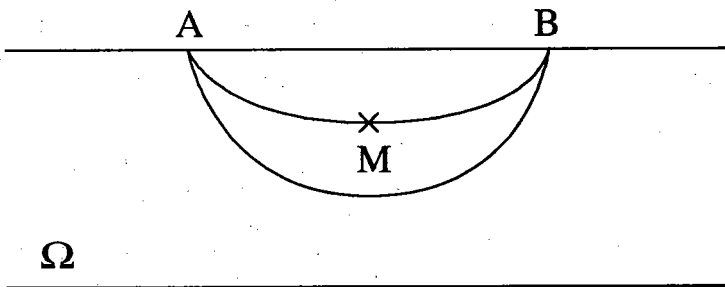
## LE THEOREME DE PYTHAGORE

diffusion : ce n'est donc pas un miracle s'il a un lien avec l'équation de la chaleur. Tous les phénomènes de diffusion ont deux aspects : une étude globale et une étude particule par particule, qui est l'étude des propriétés presque sûres du processus.

9.- *Quel est, dans les problèmes de diffusion de gaz, l'intérêt d'étudier particule par particule ?*

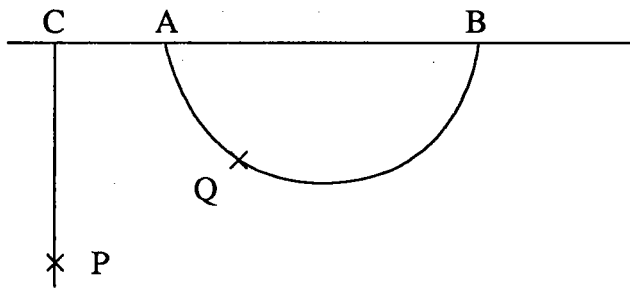
La réponse se trouve dans le livre *Les atomes* de Jean Perrin. L'intérêt est purement spéculatif quand il s'agit de particules de gaz. Par contre, lorsqu'il s'agit de particules de pollen en suspension dans un liquide, cela permet de mesurer l'agitation moléculaire qui lui donne naissance. Cela dit, à partir du moment où le mouvement brownien est devenu un objet mathématique, on peut l'étudier à des échelles qui ne sont plus celles du monde physique (que ce soit dans l'infiniment grand ou l'infiniment petit). Par exemple, la loi du logarithme itéré faisant intervenir la fonction  $\sqrt{\log \log t}$  qui ne croît pas bien vite, sera difficilement observable par les physiciens. L'étude de ces propriétés du mouvement brownien peut fournir un point de vue très intéressant et très simple sur certains problèmes de mathématiques. Considérons, par exemple, une bande dans le plan complexe munie de la géométrie de Poincaré :

*Exercice* : montrer que la géodésique joignant deux points  $A$  et  $B$  de la frontière se trouve dans le demi disque de diamètre  $(A, B)$ .



Je dois cet exercice à A. Douady. Comment le mouvement brownien va-t-il nous aider à trouver les géodésiques ? Considérons d'abord le demi-plan en-dessous de l'horizontale  $AB$ , et la géodésique joignant un point  $C$  de la frontière au point à l'infini ; c'est la demi-droite verticale  $C_\infty$ . Prenons un point  $P$  sur  $C_\infty$ , et faisons partir de  $P$  une particule brownienne. Elle va rencontrer la frontière, avec la même probabilité  $1/2$  que ce soit à gauche ou à droite de  $C$ . Par représentation conforme,  $C_\infty$  devient le demi

cercle  $AB$  et  $P$  vient en  $Q$ , la particule brownienne issue de  $P$  devient (à la loi du temps près) une particule brownienne issue de  $Q$  ; cette particule, arrêtée quand elle atteint la frontière, a la même probabilité d'aboutir entre  $A$  et  $B$  ou à l'extérieur du segment  $AB$ . Revenons maintenant à la bande. Toujours grâce à l'invariance du mouvement brownien par représentation conforme, le brownien partant d'un point  $M$  de la géodésique joignant  $A$  et  $B$  a la même probabilité d'aboutir entre  $A$  et  $B$  ou sur le reste de la frontière.



Si maintenant on baisse la frontière inférieure de  $\Omega$ , on augmente les chances d'atteindre le segment  $[A, B]$ , et lorsqu'on a baissé la frontière jusqu'à l'infini on en déduit que la géodésique se trouve entre la frontière et le demi-cercle de diamètre  $[A, B]$ . C'est une manière sympathique de voir les choses. Observons ici qu'il y a une infinité de versions de la géométrie de Poincaré : sur le disque, le demi plan, la bande etc. Dans chaque version différente, on obtient des géodésiques très différentes, mais le mouvement brownien reste le même. En particulier le mouvement brownien de la géométrie de Poincaré n'est rien d'autre qu'un mouvement brownien ordinaire restreint au disque de Poincaré. Il n'est donc pas surprenant qu'en géométrie hyperbolique, le mouvement brownien s'enfuit presque sûrement à l'infini vers un point frontière.

10.- *Le mouvement brownien décrit le mouvement d'un nuage de particules. Dans les modèles physiques, on a un très grand nombre, mais un nombre fini de particules. Les modèles probabilistes rendent-ils compte de ce nombre fini de particules ?*

Lorsqu'on a un nombre fini de particules, le bon modèle n'est pas un espace de Hilbert de dimension infinie de variables gaussiennes. Il faut dans ce cas se placer dans un espace euclidien de très grande dimension, et essayer de construire quelque chose qui ressemble à une hélice brownienne dans un espace de dimension finie. Il n'est pas possible de construire une hélice brownienne en dimension finie puisque les conditions d'orthogonalité de 3 points de l'hélice brownienne ne peuvent être

LE THEOREME DE PYTHAGORE

satisfaites que sur un ensemble fini dont le cardinal est limité par la dimension de l'espace. Par contre on pourra construire une courbe  $X(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) telle que :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\|X(0) - X(t')\|^2}{|t - t'|} \leq 1 + \varepsilon .$$

Une telle construction est possible dès que la dimension de l'espace est supérieure ou égale à 3. La constante  $\varepsilon > 0$  dépend de la dimension de l'espace et peut être choisie arbitrairement petite lorsque la dimension tend vers  $+\infty$ . Les procédés de construction de ces quasi-hélices sont purement combinatoires et reposent sur l'existence de certaines suites automatiques. Cela fournit de très bonnes simulations du mouvement brownien. Rappelons qu'il y a trois bonnes sortes de suites de 0 et de 1 : les suites périodiques, les suites aléatoires et les suites automatiques. On ne peut rien dire des suites aléatoires (si ce n'est leurs propriétés presque sûres). En effet la définition suggérée par Kolmogorov d'une suite aléatoire est une suite qu'on ne peut décrire que si on la connaît en totalité. A l'opposé, les suites périodiques peuvent être décrites facilement, mais elles n'auront que peu d'intérêt probabiliste. Les suites automatiques ont un caractère plus rigide que les suites aléatoires, mais dans certains cas, elles rendent les mêmes services, et ce sont ces suites-là qui sont utilisées pour la simulation du mouvement brownien.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [BMP] G. BROWN, G. MICHON, and J. PEYRIERE : "On the multifractal analysis of measures", *J. Statist. Phys.* 66 (1992) n°3-4, pp. 775-790.
- [BT] S. BANACH, A. TARSKI : "Sur la décomposition des ensembles de points en partie respectivement congruentes", *Fund. Math.* 6 (1924), pp. 244-277.
- [C] E. CESÀRO : "Remarques sur la courbe de von Koch", *Atti R. Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli* 12 (1905), pp. 1-12
- [E] A. EINSTEIN : *Investigations on the theory of the brownian motion*, Dover, N.Y. (1956).
- [HJKPS] T.C. HALSEY, M.H. JENSEN, Leo. P. KADANOFF, I. PROCACCIA and B.I. SHRAIMAN : "Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets", *Phys. Rev. A* (3) 33 (1986), n° 2, pp. 1141-1151.  
(*Erratum* : *Phys. Rev. A* (3) 34 (1986), p. 1601).
- [K] J.P. KAHANE : "Fractals and random measures", *Bull. Sci. Math* (2) 117 (1993), n° 1, pp. 153-159.
- [vK] H. von KOCH : "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", *Acta Math.* 30 (1906), pp. 145-174.
- [La] M. LACZKOVICH : "Equidecomposability and discrepancy : a solution of Tarski's circle-squaring problem", *J. Reine Angew. Math.* 404 (1990), pp. 77-117.

*Sur la solution de Laczkovich au problème de la quadrature géométrique du cercle :*

- [W] F. WEHRUNG : "La quadrature géométrique continue du cercle", in Séminaire d'initiation à l'Analyse, *Publ. Math. Univ. P. et M. Curie* (Paris VI) 104 (exposé n°6), (1991).

et

- [GW] R. J. GARDNER and S. WAGON : "At long last, the circle has been squared", *Notices Amer. Math. Soc.* 36 (1989), n° 10, pp. 1338-1343).
- [Lé] P. LÉVY, *Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris (1980), tome V ("Mouvement brownien") et tome I, pp. 321-352
- [LG] J.-F. Le GALL : "Some properties of planar Brownian motion", Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour 1990 : Springer lect. *Notes in Math.* 1527 (1992), pp. 111-235.
- [P] J. PEYRIERE : "Multifractal measures", in "Probabilistic and Stochastic

---

LE THEOREME DE PYTHAGORE

---

methods in analysis, with applications" (Il Ciocco, 1991) NATO *Adv. Sci. Inst., Ser. C, Math. Phys. Sci.*, 372, Kluwer Acad. Publ. (1992), pp. 175-186.

- [Pe] J. PERRIN : *Les atomes*, Flammarion, coll. Champs.
- [Pea] G. PEANO : "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane" *Math. Ann.* 36 (1890), pp. 157-160.
- [Po] G. PÓLYA : "Über eine Peanosche kurve", *Bull. Acad. Sci. Cracovie, A* (1913), pp. 305-313.
- [RY] D. REVUZ and M. YOR : "Continuous martingales and Brownian motion", Springer 1991 (*Grund. der Math Wiss.* 293).
- [W] N. WIENER : *Collected Works* (éd. P. MASANI), MIT Press 1976, Vol. 1, part. C.
- [Y] G. YOUNG : "Pythagore, comment a-t-il trouvé son théorème ?", *L'enseignement mathématique* 25 (1926), pp. 248-255.