

ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DES POLYGONES PLANS

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Résumé : Le thème de l'équidécomposabilité des polygones plans, c'est -à-dire leur décomposition en un nombre fini selon les mêmes parties triangulaires ou polygonales, est l'occasion de nombreuses réflexions et activités géométriques à différents niveaux :

au collège et au lycée, par la fabrication de puzzles lesquels nécessitent des raisonnements et des constructions géométriques élémentaires et qui mettent en jeu de façon non artificielle les isométries du plan,

en didactique, par des réflexions sur les notions d'aire, de congruence, leurs fondements théoriques et leurs enjeux didactiques,

en histoire, par l'ouverture à des problèmes qui parcourent toute l'histoire des mathématiques depuis les Grecs jusqu'à aujourd'hui et qui ne sont jamais épuisés.

Enfin, il permet aussi de s'exercer et de tester les logiciels de géométrie dynamique pour la réalisation pratique des nombreuses figures illustrant cet article.

Mots-clés : Euclide - Hilbert - Invariant de Dehn - Équidécomposabilité - Puzzles mathématiques - Translation - Symétrie centrale - Aires - Équidécomposabilité translatrice.

Dans l'enseignement élémentaire les notions d'aire et de mesure d'une aire font partie de ces concepts considérés comme intuitivement évidents, pour lesquels en tout cas on ne donne aucune démonstration même pour des figures aussi simples que le rectangle ou le triangle. Quel est le professeur de collège ou de lycée qui saurait démontrer spontanément la formule longueur \times largeur pour la mesure de l'aire d'un rectangle quelconque ? Il y a à cela une raison profonde, explicitée par HILBERT dans ses *Fondements de la géométrie* ([8]) mais déjà mise évidence dans les *Éléments* d'Euclide : la nécessité de recourir à un axiome de continuité ou axiome d'Archimède. C'est pourquoi l'essentiel des *Éléments d'Euclide*, consacré à la géométrie élémentaire, a son architecture interne nettement séparée en deux parties par le Livre V consacré à la théorie des proportions, c'est-à-dire à la gestion des rapports de grandeurs incommensurables. Le théorème de Thalès, ou la proportionnalité de l'aire d'un triangle à la longueur d'un côté et à la hauteur correspondante ne sont traités qu'au Livre VI, parce que leur démonstration exige l'axiome de continuité. Alors que le théorème de Pythagore est traité dès la fin du Livre I, c'est-à-dire nettement avant la théorie des proportions, parce qu'EUCLIDE a développé dans ce livre toute une théorie des propriétés et des comparaisons des aires sans recours à leur mesure. Le ressort principal des démonstrations d'EUCLIDE dans ce Livre I consiste à ajouter et retrancher des figures congruentes (nous dirions isométriques) à des figures congruentes, pour obtenir d'autres figures congruentes. Par exemple pour la proposition 35 :

Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

... c'est-à-dire *ont même aire*. EUCLIDE démontre en substance de la manière suivante l'égalité (en aire) des parallélogrammes $ABCD$ et $EBCF$ (figure 1).

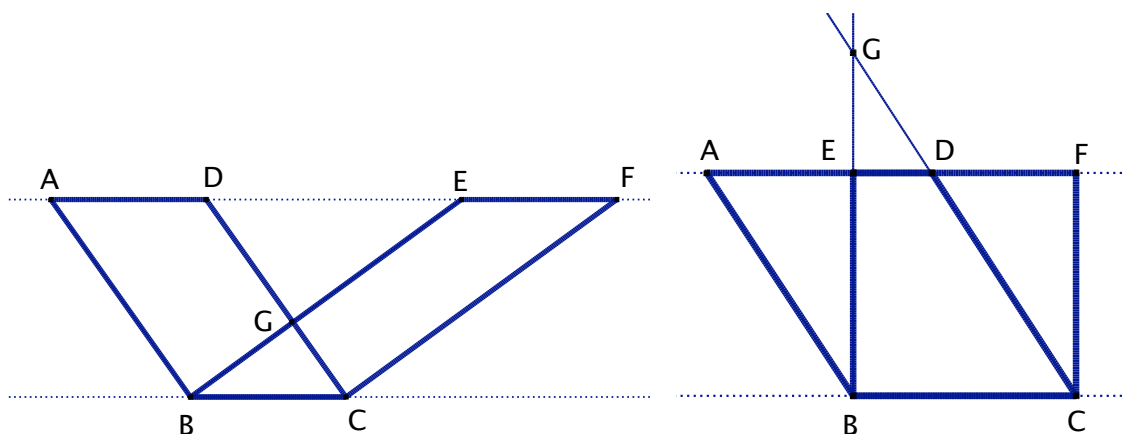


figure 1

figure 2

Comme les triangles ABE et DCF sont égaux, les parallélogrammes $ABCD$ et $EBCF$ sont égaux car obtenus à partir des triangles égaux en ajoutant un même triangle BGC et en retranchant un même triangle DGE . EUCLIDE ne traite pas le cas de la figure 2, où le point G tombe à l'extérieur des segments BE et CD . Mais le principe est le même.

Dans la suite, pour parler de deux polygones qui ont la même aire, nous dirons qu'ils sont équivalents et nous utiliserons quelquefois le signe \approx .

La démonstration d'EUCLIDE dans le cas de la figure 2 peut se simplifier en remarquant qu'on a une partie commune : le trapèze $EBCD$ et deux triangles congruents, ABE et DCF . Donc les deux parallélogrammes $ABCD$ et $EBCF$ sont composés de parties congruentes (un triangle plus un trapèze) ce que l'on traduit aujourd'hui en disant que les parallélogrammes sont *équidécoupables*. Ce terme a été introduit par HILBERT dans les éditions postérieures à la quatrième édition des *Fondements de la géométrie* ([8]) ; on parle aussi de *multicongruence* ou d'*égalité finie*, pour mettre l'accent sur le fait qu'on n'utilise qu'un nombre fini de polygones élémentaires, contrairement à ce qui se fait dans le cas d'une exhaustion. Il n'est pas difficile d'appliquer cette méthode à la situation de la figure 1 : il suffit de découper les deux parallélogrammes par des parallèles à la base équidistantes et en nombre suffisant pour que la première coupe le triangle BCG , complétées par autant de parallèles aux autres côtés (figure 3).

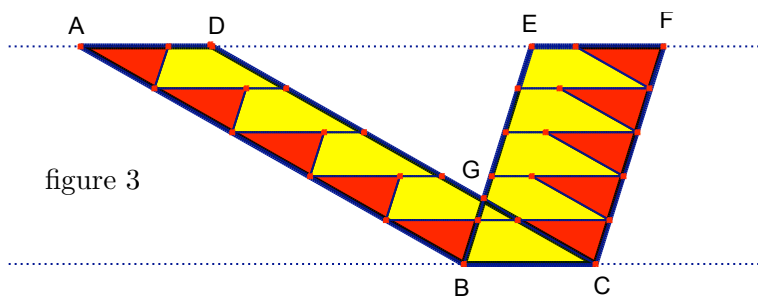


figure 3

Cette dernière démonstration a l'avantage de n'utiliser qu'une seule idée – celle de la subdivision en parties congruentes. Mais il y a aussi un problème : cette démonstration repose sur le fait qu'on peut subdiviser un segment en un nombre fini de parties de même longueur. D'un point de vue moderne cela renvoie au caractère archimédien des segments. Parce que HILBERT voulait développer une théorie des aires sans recourir à l'axiome d'Archimède il était obligé de recourir à la méthode un peu plus compliquée d'EUCLIDE qui fait aussi intervenir des soustractions d'aires. Dans le chapitre IV de ses *Fondements*, après avoir défini un polygone comme réunion finie de triangles, il convient qu'un polygone A

est décomposé en deux polygones B et C si l'on a $A = B \cup C$ et si $B \cap C$ est réduit à une réunion de segments. La décomposition en un nombre fini de polygones se définit de façon analogue. Suivent alors les deux définitions¹ essentielles pour notre propos.

DÉFINITION. Sont dits *flächengleich*, c'est-à-dire *égaux par addition*, deux polygones qui peuvent être décomposés en un nombre fini de triangles respectivement congruents deux à deux.

DÉFINITION. Sont dits *inhaltsgleich* ou *von gleichem Inhalt*, c'est-à-dire *égaux par soustraction*, deux polygones auxquels on peut ajouter des polygones égaux par addition, de manière que les deux polygones ainsi composés soient eux-mêmes égaux par addition.

La première correspond à l'équidécomposabilité.

La seconde est appelée *équicomplémentarité*.

Les réflexions de HILBERT sur une théorie de l'équidécomposabilité avait été préparées au début du XIX^e siècle par plusieurs auteurs. Un lieutenant prussien appelé Paul GERWIEN a publié deux articles ([4] et [5]) sur ces questions dans le journal de Crelle en 1833. Ils sont intitulés « Dissection d'un nombre quelconque de figures rectilignes égales en des parties égales » et « Dissection d'un ensemble quelconque de figures de différentes formes mais de même contenu sur la sphère en des parties égales ».² Dans ces deux articles, GERWIEN a donné une étude systématique de l'équidécomposabilité dans le plan (géométrie euclidienne) et sur la sphère. Dans les deux cas il démontre le résultat suivant :

Deux polygones sont de même mesure si et seulement si ils sont équidécomposables.

D'où il conclut : « Le présent mémoire montre qu'on peut définir l'égalité des figures rectilignes de la manière suivante : des figures sont égales (en aire) si elles sont composées des mêmes parties. »³

Avant de passer à l'étude détaillée du premier mémoire de GERWIEN, je voudrais signaler qu'il y a là des occasions d'activités géométriques pour le collège et le lycée très formatrices : elles ne nécessitent pas d'investissement théorique important tout en donnant l'occasion de mettre en œuvre de façon non artificielle des transformations élémentaires comme la translation ou la symétrie centrale.

1. Un exemple pour le collège

Les puzzles sont une activité ludique exemplaire pour solliciter la réflexion et l'initiative des élèves, surtout si on leur demande d'inventer leur propre puzzle. Le problème suivant peut s'inscrire dans cette démarche tout en donnant l'occasion de travailler le cours de géométrie.

Problème. Soient donnés deux triangles ABC et ADE de même base et de même hauteur (figure 4). Trouver une décomposition de ces deux triangles en les mêmes morceaux triangulaires ou polygonaux (figure 5).

¹Traduction de LAUGEL, *Principes fondamentaux de la géométrie* par M.D. HILBERT ([8]).

²Titres originaux : « Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke » et « Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichen Inhalt auf Kugeloberfläche in dieselben Stücke ».

³Pour une étude approfondie de ces questions, voir l'article de Klaus VOLKERT [10].

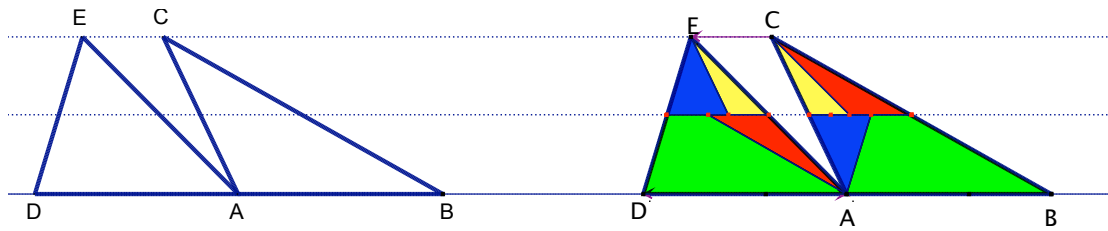


figure 4

figure 5

Comme certaines (au moins), des pièces communes auront des côtés portés par les côtés des triangles de départ, il paraît opportun de tracer par les sommets de l'un et l'autre triangle des parallèles aux côtés de l'autre; ce qui peut se traduire aussi par des translations amenant certains sommets à coïncider (figure 6). Par ailleurs, la droite des milieux peut jouer un rôle, ces milieux pouvant être centre de symétrie pour certaines pièces (figure 7). Ces deux idées suffisent ici à trouver la décomposition. La démarche de GERWIEN s'appuie sur ces idées simples, mais cherche évidemment à mettre en place une méthode générale et systématique de décomposition de deux ou plusieurs polygones équivalents.

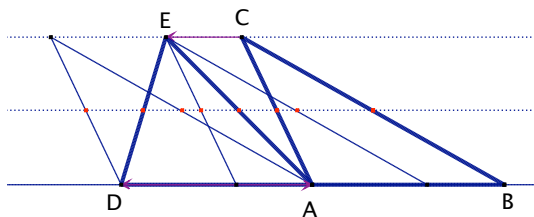


figure 6

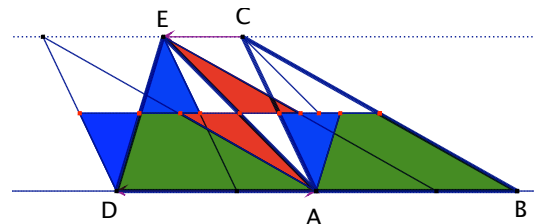


figure 7

2. L'équidécomposabilité des polygones plans par Gerwien

Dans son article du *Journal de Crelle* ([4]), GERWIEN développe un raisonnement assez élémentaire en cinq étapes, dont voici la trame :

Étape 1. Des triangles en nombre quelconque, de même sommet et dont les bases sont égales et accolées sur une même droite, sont simultanément équidécomposables au moyen de droites parallèles aux différents côtés menées par les sommets situés sur la base commune (figure 8 et 9 pour un exemple avec trois triangles accolés). Remarquons que les polygones de décomposition obtenus par ce procédé sont isométriques soit par translation, soit par symétrie centrale. Nous appellerons ce procédé, *procédé n° 1* et ceci nous sera utile dans la suite.

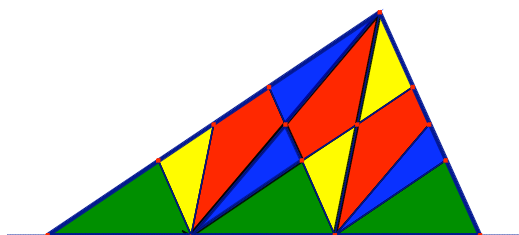


figure 8

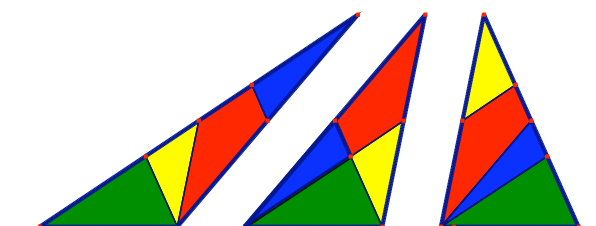


figure 9

Étape 2. Des triangles ayant même base et même hauteur sont équidécomposables

La démonstration est simple par exemple dans le cas de triangles acutangles ABC et DBC , en les plaçant de part et d'autre de la base commune : il suffit de tracer, à partir de l'intersection de la diagonale (AD) avec la base, des parallèles aux côtés du triangle situé de l'autre côté (figure 10). Nous appellerons cette décomposition *procédé n° 2*. Le ressort principal de ce procédé réside dans le fait que les triangles composants ayant une base commune sur (BC) se correspondent par une symétrie centrale, les autres par une translation. Bien entendu on pourra adapter cette décomposition à diverses situations des triangles équivalents, au moyen des transformations usuelles, comme dans l'exemple de la figure 11.

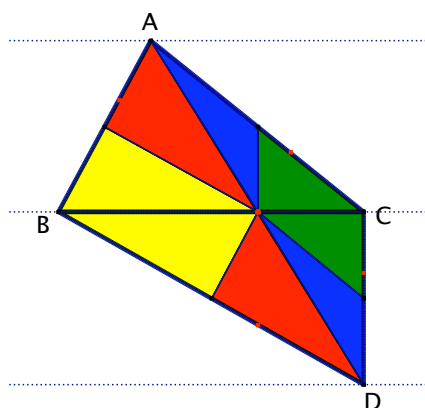


figure 10

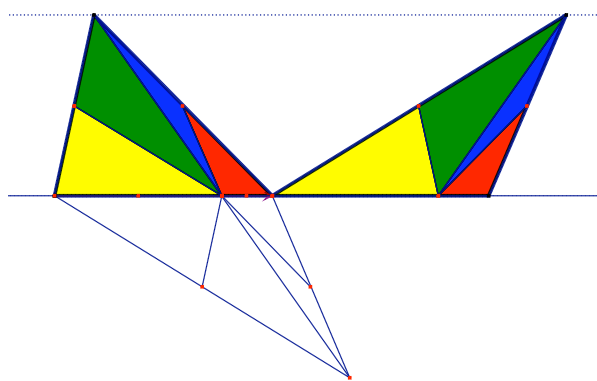


figure 11

Mais le problème peut se révéler plus compliqué si la droite (AD) coupe la base commune en un point K situé en dehors du segment $[BC]$, comme dans la figure 12. Cette dernière situation peut néanmoins se ramener à la précédente, en accolant des triangles de même base situés entre les mêmes parallèles, jusqu'à aboutir à un triangle débordant le point K (figure 13).

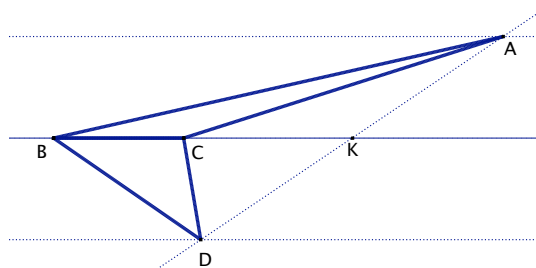


figure 12

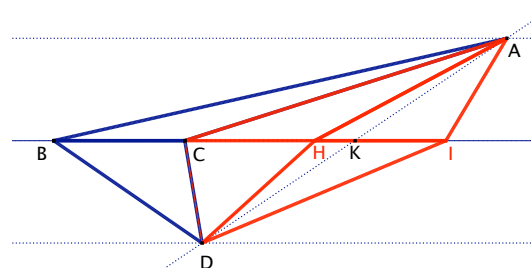


figure 13

Il suffit après cela de superposer les deux décompositions obtenues par les procédés n° 1 et 2. Dans la pratique, la figure devient vite complexe par la multiplication rapide du nombre de polygones réalisant la décomposition. C'est pourquoi nous traiterons un exemple ne nécessitant que l'adjonction d'un triangle pour dépasser l'intersection de (AD) avec la base (BC) . Dans ce cas, la décomposition des deux triangles accolés ABC et ACH ainsi que de DBC et DCH par le procédé n° 1 est très simple, rajoutant les milieux I, J, L et M (figure 14). Le procédé n° 2 appliqué aux triangles ACH et DCH , rajoute les milieux N et O (figure 15).

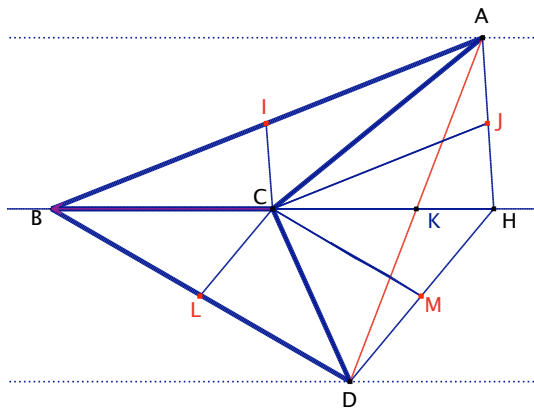


figure 14

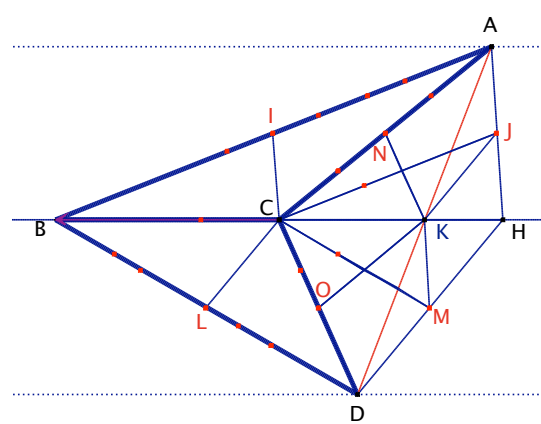


figure 15

Il faut maintenant encore superposer les deux découpages des triangles ACH et DCH . Pour cela il suffit d'appliquer la symétrie de centre E milieu de $[CK]$ pour les segments contenus dans les triangles symétriques CKN et CKO , et les translations de vecteur \overrightarrow{DK} et \overrightarrow{AK} , respectivement, pour les segments contenus dans les triangles KOD et MKD , (respectivement ANK et JAK) (figure 16). Cela nous donne ici un total de 11 triangles ou polygones pour réaliser l'équidécomposition des triangles ABC et DBC . Pour cela, il suffit de ramener ces composants dans les triangles ABC et DBC , par translation ou par symétrie centrale, selon la disposition des parties obtenues par le procédé n° 1 (figure 17). De cette manière les polygones isométriques $NPQRS$ et $OTUVW$ sont envoyés par symétrie respectivement dans les triangles ABC et DBC . Par contre pour les triangles isométriques JQK et UDM , le premier est envoyé par translation dans le triangle ABC alors que le second est envoyé par symétrie dans le triangle DBC .

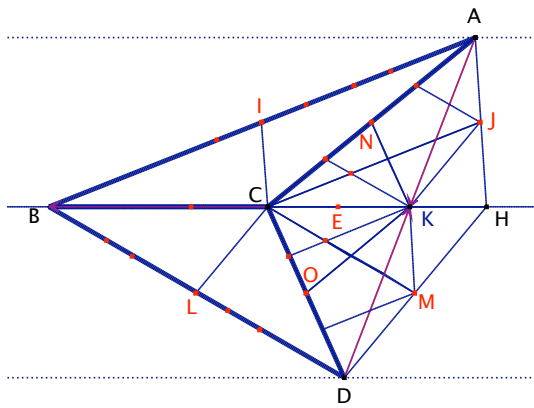


figure 16

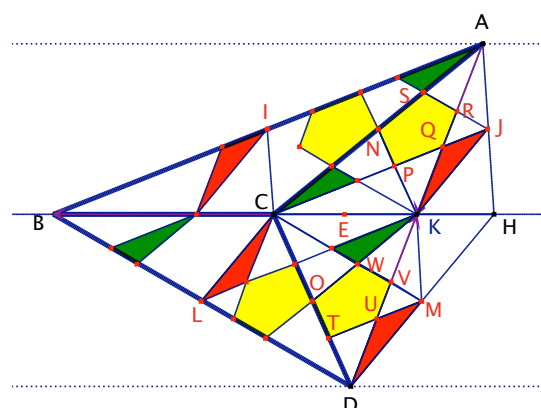


figure 17

En effectuant les transformations pour tous les polygones et triangles composants on obtient finalement l'équidécomposabilité des triangles ABC et DBC en 11 éléments. On peut réduire cette décomposition à six éléments seulement, en regroupant dans chaque triangle les morceaux contigus qui sont images l'un de l'autre par la même transformation, symétrie centrale ou translation (figure 18).

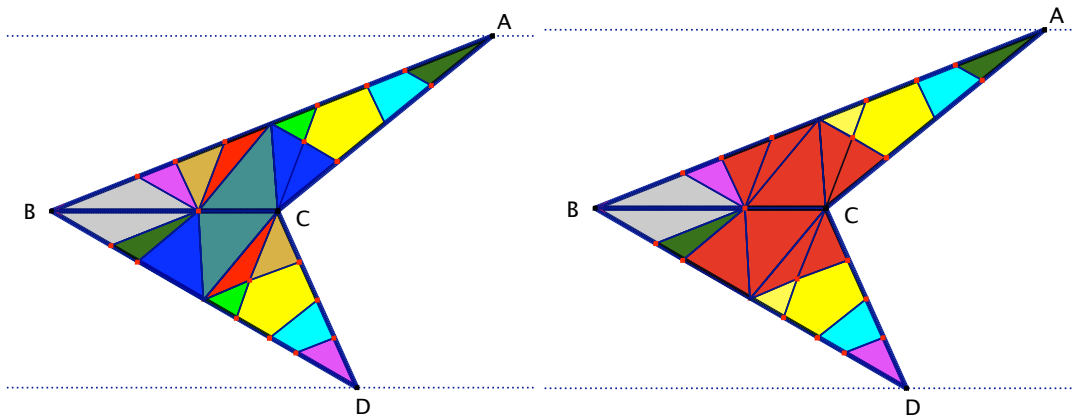


figure 18

Il existe une autre méthode, plus économe en nombre de parties à construire et déplacer dans les étapes intermédiaires, mais un peu plus délicate à mettre en place, dont nous ne donnons ici que le résultat final (figure 19) pour les mêmes triangles que ceux de la figure 18, renvoyant à l'article de Michel SARROUY qui décrit et démontre cette méthode dans la brochure réalisée par le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg ([9], 87–93).

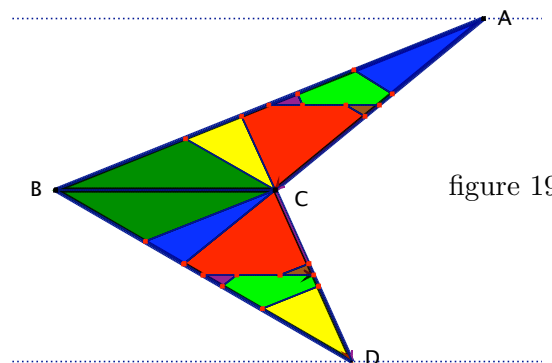


figure 19

Cette seconde décomposition nécessite sept couleurs, contre six en fin de compte dans l'autre, ce qui pose le problème du nombre minimal de couleurs nécessaires à l'équidécomposabilité; problème difficile, dont je ne connais pas de solution.

Étape 3. Deux triangles de même aire sont équidécomposables

On peut toujours prendre pour base leur plus grand côté et les accoler sur une même droite. Soient donc ABC et AED deux tels triangles équivalents quelconques⁴, AB et AE leurs bases. Pour réaliser l'équidécomposabilité des deux triangles :

1. Construire un triangle AEF de même base et même hauteur que AED , mais dont le côté AF est égal à AB . Appliquer le procédé n° 2 aux deux triangles AED et AEF , puis ramener AEF , avec sa décomposition, sur la base AB pour obtenir le triangle ABG (figure 20).
2. Appliquer le procédé n° 2 aux triangles ABC et ABG , en conservant la décomposition précédente superposée, transporter le découpage obtenu sur le triangle AEF , puis le

⁴Cela pose le problème intéressant suivant : construire à la règle et au compas deux triangles de même aire n'ayant ni mêmes bases ni mêmes hauteurs, problème que nous laissons au lecteur le soin de traiter. Des indications sont fournies dans [9].

transformer par symétrie centrale ou translation en l'appliquant au triangle ADE . Regrouper les pièces contiguës (figure 21).

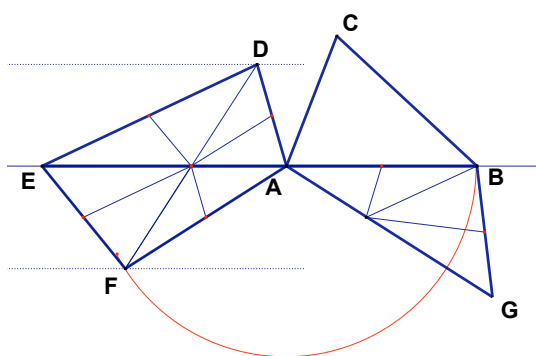


figure 20

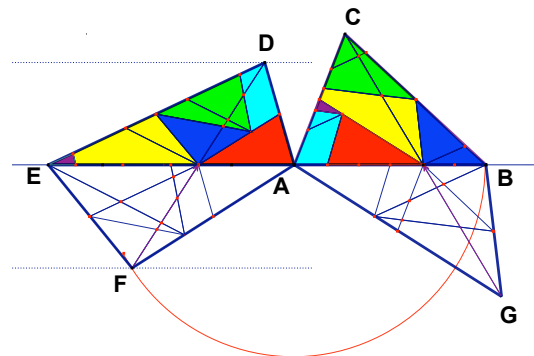


figure 21

Étape 4. Deux polygones de même aire sont équidécomposables

Le principe consiste à diminuer de proche en proche le nombre de côtés des polygones pour se ramener en fin de compte à deux triangles. Considérons pour commencer un quadrilatère $ABCD$. Une parallèle par B à la diagonale (AC) coupe (CD) en E . Alors le triangle AED est équivalent au quadrilatère $ABCD$. Il suffit de remarquer que les triangles ABC et AEC sont équivalents (figure 22). Le lecteur appliquera sans difficulté la méthode à un quadrilatère non convexe. Pour un polygone quelconque de n côtés, on appliquera la méthode précédente $(n - 3)$ fois pour aboutir à un triangle équivalent (figure 23).

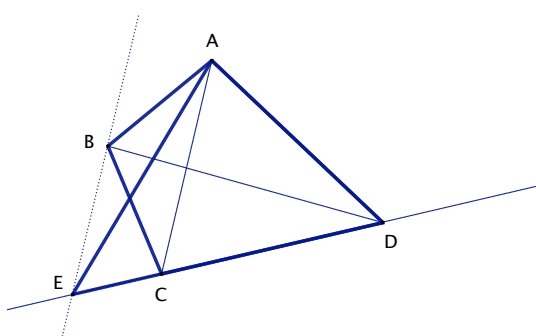


figure 22

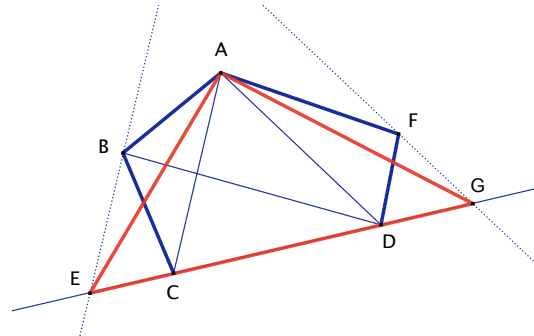


figure 23

Nous laissons le soin au lecteur de reprendre l'ensemble des idées et méthodes développées ci-dessus pour expliciter la décomposition du pentagone et du triangle équivalent, dans la figure 24.

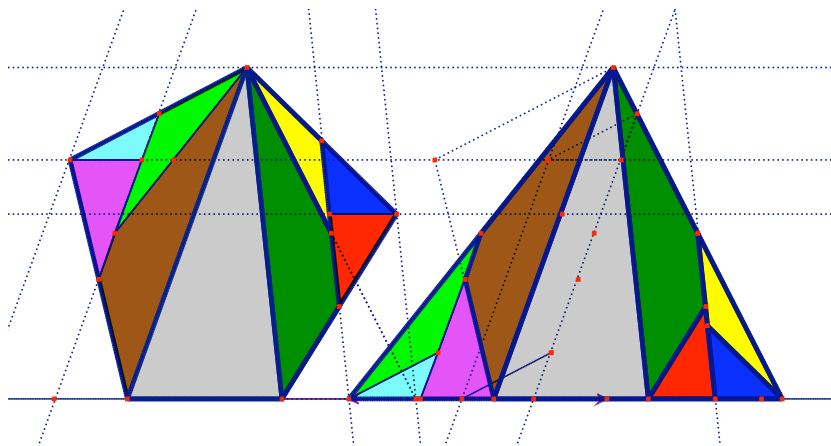


figure 24

Étape 5. Un nombre fini quelconque de polygones équivalents sont équidécomposables

GERWIEN utilise simplement un raisonnement qui revient à démontrer la transitivité de la relation d'équivalence définie par l'équidécomposabilité. Si les polygones P et Q sont équidécomposables, cela veut dire qu'ils sont tous deux réunion des mêmes n polygones $p_i (1 \leq i \leq n)$. De même, Q et R sont équidécomposables, donc réunion des mêmes m polygones $q_j (1 \leq j \leq m)$. Alors P et R (et Q) sont également équidécomposables, réunion des mêmes $m \times n$ polygones formés par toutes les intersections d'un p_i avec un q_j .

Appliquons ces méthodes à un exemple classique bien connu, mais dont la mise en place paraît bien mystérieuse : le fameux puzzle de Dudeney transformant un carré en triangle équilatéral et réciproquement. Si la détermination des pièces composant les deux figures est facile à expliciter, le mystère reste dans l'interrogation suivante : comment DUDENEY a-t-il trouvé cette décomposition ? Je n'ai pas la réponse à cette question, mais les procédés mis en place par GERWIEN y conduisent naturellement, comme nous allons le montrer.

3. Le puzzle de Dudeney

Henri Ernest DUDENEY (1857 – 1930) était un mathématicien anglais autodidacte, qui a publié de nombreux puzzles dans un grand nombre de périodiques durant plus d'une trentaine d'années, sous le pseudonyme de « Sphinx ». Un des plus célèbres (voir [3] p. 136) est constitué de quatre morceaux pouvant constituer indifféremment un triangle équilatéral ou un carré (figure 25 et 26) . Cela correspond donc exactement à une équidécomposabilité de ces deux polygones.

On déroule le triangle de la droite vers la gauche. On enroule les morceaux de la gauche vers la droite.

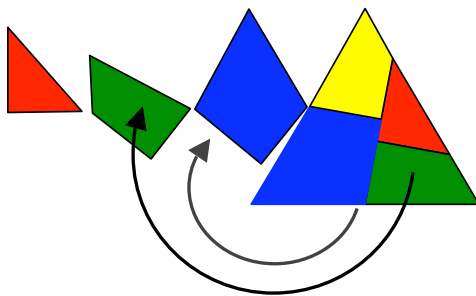


figure 25

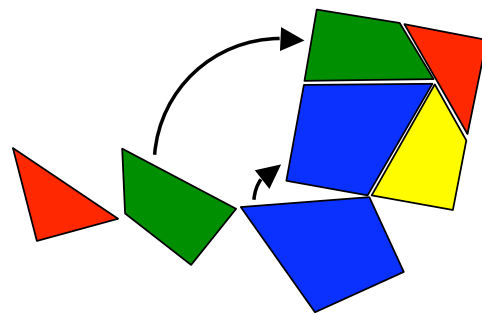


figure 26

Traisons cette équidécomposabilité à la manière de GERWIEN. Successivement :

1. transformer le carré en triangle⁵ (rectangle, en l'occurrence ; figure 27),
2. appliquer la procédure de l'étape 3 pour les deux triangles (figure 28),
3. remonter du triangle rectangle au carré (figure 29),
4. regrouper les pièces contiguës ; par exemple la rouge, la jaune, une partie de la bleu clair, une partie de la vert clair (figure 30).

⁵Nous ne traiterons pas ici le problème de la construction d'un carré équivalent à un triangle ou à une figure quelconque donnée, aussi appelé problème de la quadrature. Cette question est traitée dans la brochure [9].

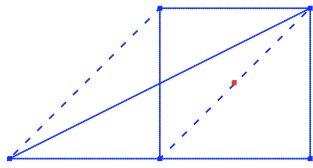


figure 27

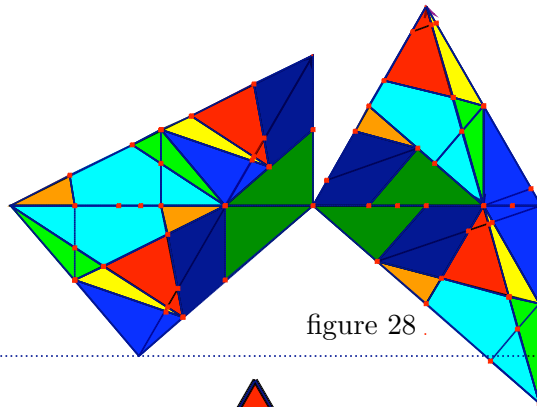


figure 28

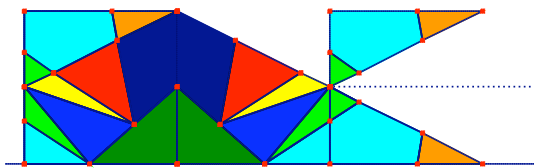


figure 29

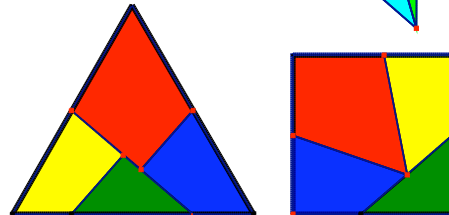


figure 30

En pratique les pièces sont obtenues à partir du triangle équilatéral ABC de la manière suivante : soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[AB]$ respectivement. Soit K sur $[AC]$ tel que CK soit égal au côté du carré, (NL) perpendiculaire à (MK) en L , I le milieu de $[MK]$, H le symétrique de L par rapport à I , (HG) perpendiculaire à (KM) en H , qui coupe (AC) en G (figure 31). Alors on peut démontrer

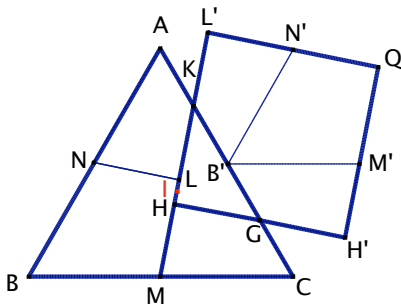


figure 31

1. que les symétriques de A par rapport à K et de C par rapport à G sont confondus en un point B' ,
2. que le symétrique $B'N'L'K$ du polygone $ANLK$, par rapport à K , le symétrique $H'M'B'G$ du polygone $HMCG$ par rapport à G et le translaté $N'B'M'Q$ de vecteur $\vec{BB'}$ du polygone $NBML$ constituent un recouvrement exact du carré $HH'QL'$.

De fait il y a là un découpage plus général permettant de découper un triangle quelconque (au moins s'il est acutangle) en morceaux qui, reconstitués autrement, donnent un rectangle.

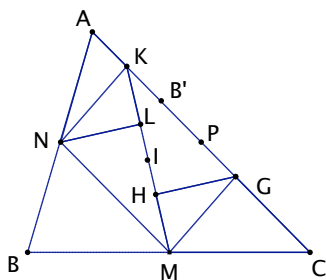


figure 32

Soit ABC le triangle que l'on veut transformer en rectangle. Plaçons les milieux M, N, P des côtés $[BC]$, $[AB]$, $[AC]$ respectivement et choisissons un point K sur $[AP]$ (On suppose que l'un au moins des côtés du rectangle est supérieur à $MP = \frac{1}{2}AB$ et inférieur à la médiane AM). La parallèle à (NK) passant par M coupe alors $[AC]$ en un point G (figure 32).

1. Démontrer que $MGKN$ est un parallélogramme de centre I milieu de $[MK]$.

2. On abaisse les perpendiculaires à (MK) issues de N et G , qui coupent $[MK]$ en L et H , respectivement. Démontrer que $NL = HG$.
3. Démontrer que le symétrique de A par rapport à K et le symétrique de C par rapport à G sont confondus en un point B' .

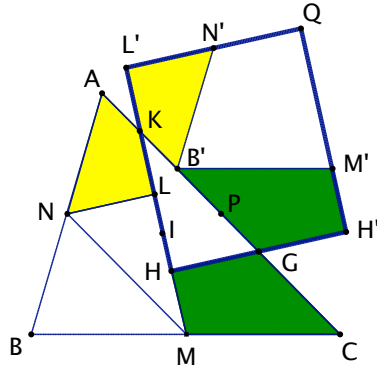


figure 33

4. Construire le polygone $KL'N'B'$ symétrique du polygone $KLNA$ par rapport à K , et le polygone $GH'M'B'$ symétrique du polygone $GHMC$ par rapport à G . Soit Q l'intersection de $(L'N')$ avec $(M'H')$. Démontrer que $L'HH'Q$ est un rectangle dont le côté $L'H$ est égal à MK .
5. Démontrer que le polygone $N'B'M'Q$ est l'image du polygone $NBML$ par une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$. En déduire que le rectangle $L'HH'Q$ est constitué des mêmes polygones que le triangle ABC .

On peut ainsi, en trois coups de ciseaux, découper un triangle quelconque en quatre morceaux qui, réarrangés donnent un rectangle. Concluons cette partie en signalant que cet agencement donne du même coup un pavage alternant triangles et rectangles en général, ou triangles équilatéraux et carrés en particulier (figure 34).

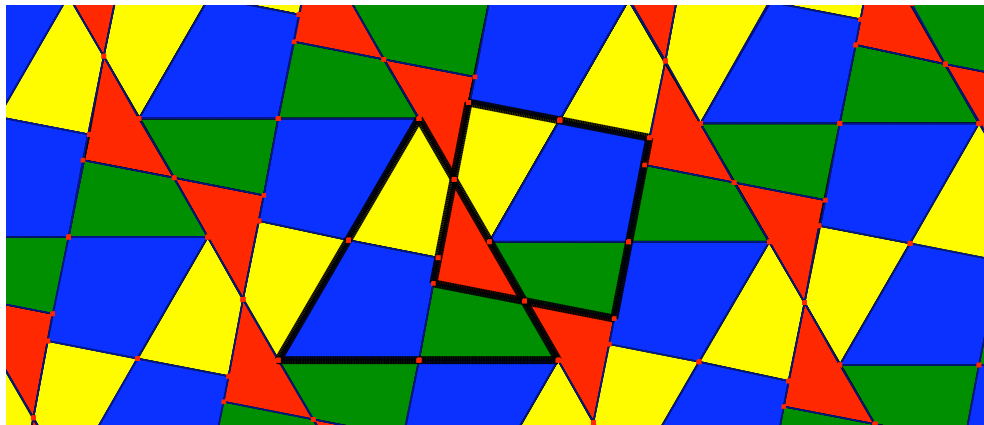


figure 34

On aura remarqué que dans les méthodes de décomposition pour réaliser l'équidécomposabilité, les transformations élémentaires jouent un rôle déterminant, particulièrement les translations et les symétrie centrales. Les mathématiciens suisses H. HADWIGER et P. GLUR se sont ainsi posé la question de la possibilité d'une équidécomposabilité de deux figures planes en imposant la condition supplémentaire que les composants se correspondent tous, deux à deux, par translation. Ils introduisent ainsi la notion d'équidécomposabilité translative.

4. Équidécomposabilité translative

L'équidécomposabilité translative est nettement plus contraignante que l'équidécomposabilité simple, en ce qu'elle doit également prendre en compte la position relative des polygones considérés dans le plan. HADWIGER et GLUR ([6]) commencent par démontrer

l'équidécomposabilité translative d'un rectangle et d'un parallélogramme de même base, situés entre les mêmes parallèles. Celle-ci peut être très simple (figure 35) ou plus compliquée (figure 37), selon que la projection orthogonale des côtés obliques sur l'une ou l'autre base tombe à l'intérieur ou à l'extérieur de cette base. Dans ce second cas, on « redressera » de proche en proche le parallélogramme selon le principe de la figure 36.

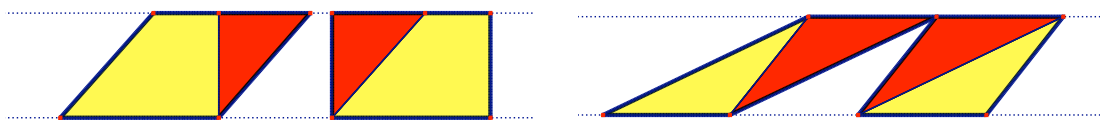


figure 35

figure 36

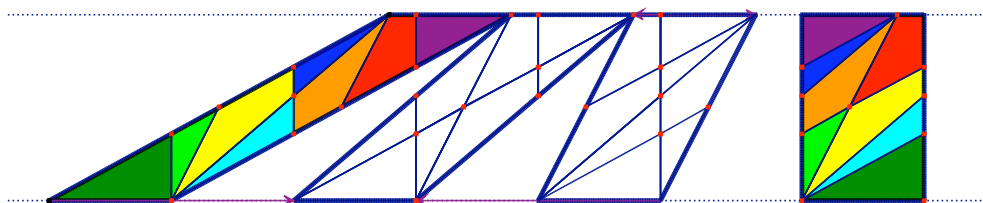


figure 37

Décomposition qui peut finalement se simplifier en regroupant les polygones identiques et contigus (figure 38); ce qui donne une autre idée de décomposition, plus simple, et consistant à découper des tranches parallèles de la largeur du rectangle, ce qui reprend un peu l'idée de la figure 3.

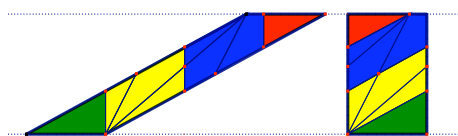


figure 38

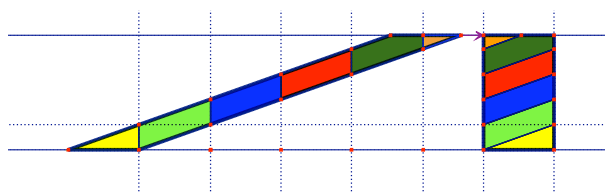


figure 39

Puis est étudiée l'équidécomposabilité translative de deux rectangles équivalents quelconques \mathbf{R} et \mathbf{R}' . Le principe consiste à utiliser la transitivité en construisant :

1. les parallélogrammes équivalents \mathbf{P} et \mathbf{P}' , compris entre les mêmes bases que les rectangles,
2. une direction⁶ sur laquelle les bases des rectangles \mathbf{R} et \mathbf{R}' se projettent selon des segments de même longueur, et sur lesquels on construira des rectangles égaux \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}'_1 et, bien sûr, équivalents à \mathbf{R} et \mathbf{R}' (figure 40). Il suffit alors d'appliquer les équivalences $\mathbf{R} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{R}_1 \approx \mathbf{R}'_1 \approx \mathbf{P}' \approx \mathbf{R}'$, de les traduire en décompositions géométriques que l'on superpose au fur et à mesure (figures 41 et 42).

⁶On peut démontrer qu'une telle direction existe toujours, par exemple en utilisant le produit scalaire, et elle se construit simplement à la règle et au compas.

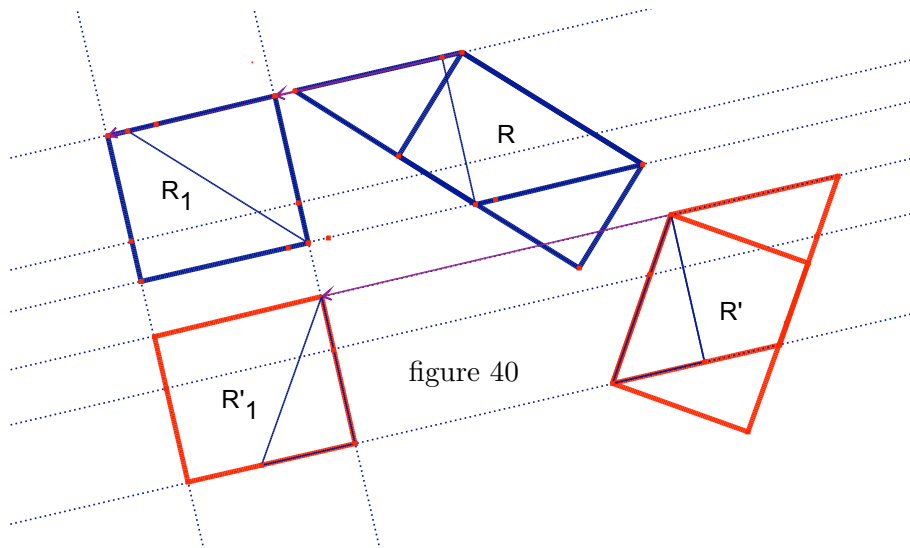


figure 40

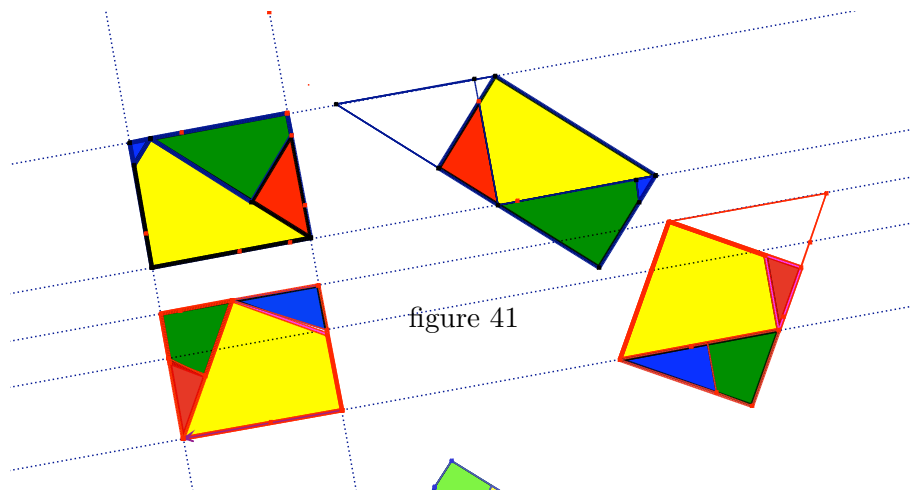


figure 41

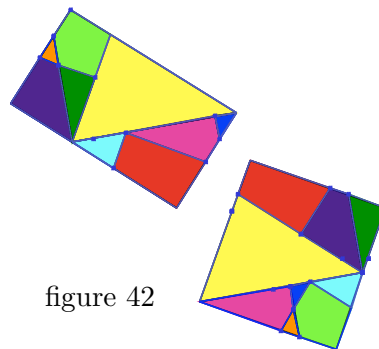


figure 42

Pourquoi deux rectangles quelconques équivalents sont-ils translativement équidécomposables, alors qu'on essaierait en vain une telle décomposition sur deux triangles quelconques, équivalents mais non isométriques ? Pour répondre à cette question, HADWIGER et GLUR introduisent une fonction L dépendant à la fois des directions et des longueurs des côtés des polygones considérés. Plus précisément, pour chaque côté, considérons le couple formé par sa longueur et l'angle qu'il fait avec une direction fixe. Les côtés sont orientés de telle façon que le périmètre soit parcouru en gardant l'intérieur du polygone à sa gauche. Leur angle est mesuré de 0° à 360° , dans le sens trigonométrique. Pour une direction α , soit $S_\alpha(A)$ la somme des longueurs des côtés du polygone A correspondant à l'angle α et $L_\alpha(A) = S_\alpha(A) - S_{\alpha+\pi}(A)$. Il est clair que cette fonction est nulle pour un rectangle. Mais le théorème important, démontré dans l'article ([6]) de HADWIGER et GLUR est le suivant :

Théorème. Deux polygones équivalents A et B sont translativement équidécomposables si et seulement si pour tout α tel que $0 \leq \alpha < 2\pi$ on a $L_\alpha(A) = L_\alpha(B)$.

Des exemples sont évidemment donnés par des carrés isométriques (figure 43) ou par des polygones formés chacun de couples de côtés égaux et parallèles (figure 44, voir [2] p. 133).

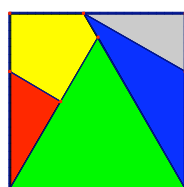


figure 43

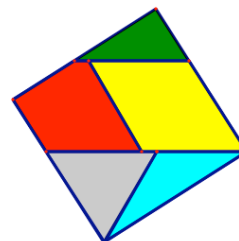
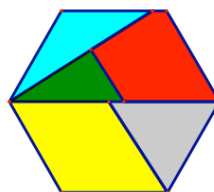
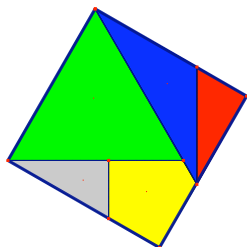


figure 44

HADWIGER et GLUR donnent sans explication, ni mesures de côtés, l'exemple de deux trapèzes. Nous avons cherché à les construire de sorte que les longueurs des côtés des trapèzes et des polygones intervenant dans la décomposition soient entières. La figure 45 montre le résultat que nous avons obtenu.

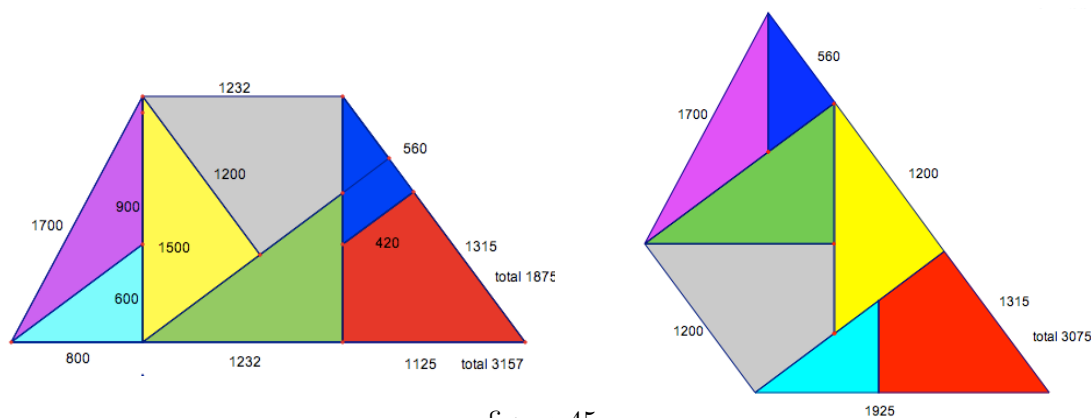


figure 45

On aura pu le constater amplement : il y a là, à la fois, des possibilités d'activités géométriques à divers niveaux du collège et du lycée, mais aussi des domaines encore ouverts à diverses investigations, dans l'espace, pour des géométries non euclidiennes, sur la sphère, *etc.*

5. Le 3^e problème de Hilbert

L'équidécomposabilité des polyèdres dans l'espace a fait l'objet du troisième des 23 problèmes que HILBERT a posés lors du second Congrès International des Mathématiciens à Paris, en 1900 (c'est à dire un an après la publication des Fondements de la géométrie) sous le titre : *De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales* et qu'il présente ainsi ⁷ :

Dans deux lettres adressées à GERLING, GAUSS exprime le regret que certains théorèmes de Stéréométrie dépendent de la méthode d'exhaustion ou, comme

⁷HILBERT, *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, in *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens, Procès verbaux et communications* publiés par E. DUPOCQ, traduction de M. L. LAUGEL, Gauthier Villars, 1902.

on dirait aujourd'hui, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). GAUSS cite en particulier ce théorème d'EUCLIDE, que deux pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Le problème analogue relatif au plan est aujourd'hui complètement résolu. GERLING réussit à démontrer l'égalité des volumes de polyèdres symétriques en les décomposant en parties congruentes; mais la démonstration, par ce moyen, du théorème précité d'EUCLIDE dans le cas général, ne me paraît guère possible. Il s'agirait donc d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité du problème. On serait immédiatement en possession d'une telle démonstration du moment que l'on pourrait assigner deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales qu'il serait impossible de décomposer en tétraèdres congruents (équidécomposabilité), et qui ne pourraient non plus, par l'addition de tétraèdres congruents, être transformés en polyèdres, eux-mêmes décomposables en tétraèdres congruents (équicomplémentables).

De fait, avant même la tenue du congrès, l'assistant de HILBERT, Max DEHN (1878 – 1952) avait résolu le problème en démontrant qu'il existe deux polyèdres de même volume, non équidécomposables. Pour ce faire, il introduit un invariant \mathbf{D} (qui est resté sous le nom d'invariant de Dehn) associé à un polyèdre et tel que deux polyèdres équidécomposables ont nécessairement même invariant \mathbf{D} . Ce qui lui permet alors de démontrer qu'un tétraèdre régulier et un prisme ne peuvent jamais avoir même invariant et donc ne peuvent être équidécomposables. L'invariant de Dehn et sa démonstration sont assez compliqués, mais des simplifications ultérieures, en particulier par HADWIGER permettent d'en donner une idée.

Nous dirons qu'un ensemble fini donné \mathbf{M} de nombres réels x_1, x_2, \dots, x_k est linéairement dépendant, s'il existe des entiers relatifs n_1, n_2, \dots, n_k tels que

$$(1) \quad n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k = 0 .$$

Une fonction réelle f définie sur \mathbf{M} sera dite additive, si pour toute relation du type (1) entre des éléments de \mathbf{M} la même relation de dépendance est vérifiée pour les réels images, c'est-à-dire

$$(2) \quad n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + \dots + n_kf(x_k) = 0 .$$

Soit alors \mathbf{A} un polyèdre, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les angles dièdres de \mathbf{A} , l_1, l_2, \dots, l_p les longueurs des arêtes correspondantes, alors la somme

$$l_1f(\alpha_1) + l_2f(\alpha_2) + \dots + l_pf(\alpha_p) = f(\mathbf{A})$$

est appelée invariant de Dehn du polyèdre \mathbf{A} , et l'on a le théorème

Théorème. Soient deux polyèdres \mathbf{A} et \mathbf{B} ayant pour angles dièdres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ respectivement; et soit \mathbf{M} un ensemble de réels contenant

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q .$$

S'il existe une fonction additive f , définie sur \mathbf{M} , telle que $f(\pi) = 0$ et $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$, alors les polyèdres \mathbf{A} et \mathbf{B} ne sont pas équidécomposables (ni équicomplémentables).

En particulier, un cube \mathbf{A} et un tétraèdre régulier \mathbf{B} de même volume ne sont pas équidécomposables. Se basant sur le fait que l'angle dièdre entre deux faces adjacentes d'un tétraèdre régulier vaut $\phi = \text{Arc cos}(1/3)$, et que celui entre deux faces adjacentes du cube vaut $\pi/2$, l'ensemble \mathbf{M} correspondant peut se réduire à $\mathbf{M} = \{\pi, \pi/2, \phi\}$. Soit alors f la fonction réelle définie sur \mathbf{M} par

$$f(\pi) = 0 ; f(\pi/2) = 0 ; f(\phi) = 1 .$$

Cette fonction est additive. En effet toute relation de la forme

$$n_1\pi + n_2\pi/2 + n_3\phi = 0$$

entraîne $n_3 = 0$ car le réel $\frac{\phi}{\pi} = \frac{1}{\pi} \text{Arc cos} \left(\frac{1}{3} \right)$ est irrationnel (voir [1], p. 102), et donc aussi

$$n_1f(\pi) + n_2f(\pi/2) + n_3f(\phi) = 0 .$$

Les invariants de Dehn correspondants sont alors $f(\mathbf{A}) = 12a.f(\pi/2) = 0$ (où a est l'arête du cube), et $f(\mathbf{B}) = 6b.f(\phi) = 6b \neq 0$ (où b est l'arête du tétraèdre). En conséquence du théorème, le cube et le tétraèdre régulier ne sont pas équidécomposables car ils n'ont pas le même invariant de Dehn.

Un pas supplémentaire est fait en 1965 par J.-P SYDLER qui montre que la condition nécessaire pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables, à savoir l'égalité de leurs invariants de Dehn, est aussi suffisante.

On peut constater par ce bref exemple que les situations dans l'espace deviennent rapidement plus difficiles à explorer que celles du plan et qu'elles restent d'actualité. Ceux qui souhaitent les étudier plus en détail peuvent se reporter à la bibliographie, en particulier les références [1], [2], [3], [7] et [10].

Bibliographie

- [1] V. BOLTJANSKII (1978), HILBERT's Third Problem, *John Wiley & Sons, New York*.
- [2] E. FOURREY (1920), Curiosités géométriques, *Vuibert, Paris*.
- [3] G. FREDERICKSON (1997), Dissections : Plane and Fancy, *Cambridge University Press*.
- [4] P. GERWIEN (1833), *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke*, J. Reine Angew. Math. **10**, 228–234.
- [5] P. GERWIEN (1833), *Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugeloberfläche in dieselben Stücke*, J. Reine Angew. Math. **10**, 235–240.
- [6] H. HADWIGER & P. GLUR (1951), *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*, Elemente der Math. **6**, 97–106.
- [7] H. HADWIGER (1957), Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, *Springer-Verlag*.
- [8] D. HILBERT, Les fondements de la géométrie, *Édition critique préparée par Paul Rossier. Ouvrage publié avec le concours du CNRS. Dunod, Paris 1971*.
Autre traduction, disponible en ligne, sous le titre Principes fondamentaux de la géométrie par M. D. HILBERT ; trad. par L. LAUGEL, Gauthier-Villars, Paris 1900.
- [9] Groupe HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES (1996), Activités géométriques pour le collège et le lycée, présentées dans une perspective historique, Vol. I, *IREM de Strasbourg*.
- [10] K. VOLKERT (1999), *Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone : einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes*, Mathematische Semesterberichte, **46**, 1–28, *Springer Verlag*.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

IREM de Strasbourg

jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr